Задание 1. Даны две матрицы А и В. Найти А*В, В*А, A^{-1}, A^{-1}*A..

$$A=\begin{pmatrix}6&7&3\\3&1&0\\2&2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&0&5\\4&-1&-2\\4&3&7\end{pmatrix};$$

$$1)A\cdot B=\begin{pmatrix}6&7&3\\3&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&5\\4&-1&-2\\4&3&7\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}6\cdot2+7\cdot4+3\cdot4 & 6\cdot0+7\cdot(-1)+3\cdot3 & 6\cdot5+7\cdot(-2)+3\cdot7\\ 3\cdot2+1\cdot4+0\cdot4 & 3\cdot0+1\cdot(-1)+0\cdot3 & 3\cdot5+1\cdot(-2)+0\cdot7\\ 2\cdot2+2\cdot4+1\cdot4 & 2\cdot0+2\cdot(-1)+1\cdot3 & 2\cdot5+2\cdot(-2)+1\cdot7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}52&2&37\\10&-1&13\\16&1&13\end{pmatrix}.$$

$$2)B\cdot A=\begin{pmatrix}2&0&5\\4&-1&-2\\4&3&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6&7&3\\3&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}2\cdot6+0\cdot3+5\cdot2 & 2\cdot7+0\cdot1+5\cdot2 & 2\cdot3+0\cdot0+5\cdot1\\ 4\cdot6+(-1)\cdot3+(-2)\cdot2 & 4\cdot7+(-1)\cdot1+(-2)\cdot2 & 4\cdot3+(-1)\cdot0+(-2)\cdot1\\ 4\cdot6+3\cdot3+7\cdot2 & 4\cdot7+3\cdot1+7\cdot2 & 4\cdot3+3\cdot0+7\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32&24&11\\17&23&10\\47&45&19\end{pmatrix}$$

3) A^{-1}

$$|A|=\begin{vmatrix}6&7&3\\3&1&0\\2&2&1\end{vmatrix}=6\cdot1\cdot1+7\cdot0\cdot2+3\cdot2\cdot3-2\cdot1\cdot3-2\cdot0\cdot6-3\cdot7\cdot1=-3$$

A_{11}=1; A_{12}= -3 ; A_{13}= 4

A_{21}=-1 ; A_{22}= 0; A_{23}= 2

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1&-3&4\\-1&0&2\\-3&9&-15\end{pmatrix};\ \tilde{A}^T=\begin{pmatrix}1&-1&-3\\-3&0&9\\4&2&-15\end{pmatrix}$$

A_{31}=-3 ; A_{32}= 9: A_{33} = -15

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix};\ A^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&-3\\-3&0&9\\4&2&-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&1\\1&0&-3\\-\frac{4}{3}&-\frac{2}{3}&5\end{pmatrix}$$

$$A^1A=AA^1=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&-3\\-3&0&9\\4&2&-15\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6&7&3\\3&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6&7&3\\3&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&-3\\-3&0&9\\4&2&-15\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6-21+12 & -6+0+6 & -18+63-45\\ 3-3+0 & -3+0+0 & -9+9+0\\ 2-6+4 & -2+0+2 & -6+18-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

Задание 2. Доказать совместимость системы и решить ее тремя способами: 1) методом Крамера; 2) методом Гаусса; 3) матричным способом (предварительно подставить значения коэффициентов, согласно варианту).

1) $\begin{cases} bx+cy-az=b^2 \\ ax-by+cz=c^2 \\ cx+ay-bz=a^2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} cx+by-az=b^2 \\ -bx+ay+cz=c^2 \\ ax+cy-bz=a^2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} cx-ay+bz=b^2 \\ -bx+cy+az=c^2 \\ ax+by-cz=a^2 \end{cases}$; $a=4; b=4; c=-1$

1) $\begin{cases} 4x-y-4z=16 \\ 4x-4y-z=1 \\ -x+4y-4z=16 \end{cases}$; $D=\begin{vmatrix} 4 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & -1 \\ -1 & 4 & -4 \end{vmatrix}=15\neq 0$ - система совместна

$$D_x=\begin{vmatrix} 16 & -1 & -4 \\ 1 & -4 & -1 \\ 16 & 4 & -4 \end{vmatrix}=64-64-1+16-16+16=60;$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 4 & 16 & -4 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & 16 & -4 \end{vmatrix}=-16+16-256-4+256+64=60;$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 4 & -1 & 16 \\ 4 & -4 & 1 \\ -1 & 4 & 16 \end{vmatrix}=-256+1+256-64+64-16=-15;$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{60}{15}=4;\ y=\frac{D_y}{D}=\frac{60}{15}=4;\ z=\frac{D_z}{D}=\frac{-15}{15}=-1$$

Ответ:(4;4;-1).

2) $\begin{cases} -x+4y-4z=16 \\ -4x+4y-z=1 \\ 4x-y-4z=16 \end{cases}$ умножим первое уравнение системы на 4: $\begin{cases} -4x+16y-16z=64 \\ -4x+4y-z=1 \\ 4x-y-4z=16 \end{cases}$

Вычтем первое уравнение из второго и сложим с третьим:

$\begin{cases} -x+4y-4z=16 \\ -12y+15z=-63 \\ 15y-20z=80 \end{cases}$; домножим второе уравнение на 5, третье на 4 и сложим их

$\begin{cases} -x+4y-4z=16 \\ -60y+75z=-315 \\ 60y-80z=320 \end{cases}$, получим $\begin{cases} -x+4y-4z=16 \\ -12y+15z=-63 \\ -5z=5 \end{cases}$, отсюда z=-1, подставляя значение z во второе уравнение, получим $-12y-15=-63$, или $-12y=-48$ и тогда $y=4$, аналогично поставляем значения z=-1и $y=4$ в первое уравнение, получим $-x+4\cdot4-4\cdot(-1)=16$, или $x=4$.

Ответ:(4;4;-1).

3) $\begin{cases} -x-4y+4z=16 \\ -4x-y+4z=1 \\ 4x+4y+z=16 \end{cases}$; $A=\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ -4 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 16 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & -4 & 4\\ -4 & -1 & 4\\ 4 & 4 & 1\end{vmatrix}=1-64-64+16-16+16--111;$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-17;\ A_{12}=-\begin{vmatrix}-4 & 4\\ 4 & 1\end{vmatrix}=20;\ A_{13}=\begin{vmatrix}-4 & -1\\ 4 & 4\end{vmatrix}=-12$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-4 & 4\\ 4 & 1\end{vmatrix}=20;\ A_{22}=\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-17;\ A_{23}=-\begin{vmatrix}-1 & -4\\ 4 & 4\end{vmatrix}=-12$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-4 & 4\\ -1 & 4\end{vmatrix}=-12;\ A_{32}=-\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -4 & 4\end{vmatrix}=-12;\ A_{33}=\begin{vmatrix}-1 & -4\\ -4 & -1\end{vmatrix}=-15$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=-\frac{1}{111}\begin{pmatrix}-17 & 20 & -12\\ 20 & -17 & -12\\ -12 & -12 & -15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}16\\ 1\\ 16\end{pmatrix}=-\frac{1}{111}\begin{pmatrix}-272+20-192\\ 320-17-192\\ -192-12-240\end{pmatrix}=-\frac{1}{111}\begin{pmatrix}-444\\ 111\\ -444\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ -1\\ 4\end{pmatrix}.$$

Ответ:(4;-1;4).

Задание 3. Компланарны ли векторы a,b,c?

a=(4;-3;1) b=(2 ;-1;1) c=(2 ;-2;0)

Найдем смешанное произведение векторов в координатах:

$\begin{vmatrix}4 & -3 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 0\end{vmatrix}=0-6-4+2+8=0$; Смешанное произведение векторов равно нулю,

следовательно векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - компланарны.

Задание 4.

Найти угол между прямой и плоскостью и точку их пересечения:

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{2};\quad 3x+4y+7z+24=0$$

Острый угол между прямой и плоскостью определяем по формуле:

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}=\left|\frac{3\cdot2+4\cdot3+7\cdot2}{\sqrt{3^2+4^2+7^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2+2^2}}\right|=\frac{32}{\sqrt{1258}}\approx0{,}902$$

$\varphi\approx64^\circ$.

Найдем точку пересечения прямой и плоскости.

Представим уравнение прямой в параметрическом виде.

$\begin{cases}x-3=2t\\ y+1=3\cdot t\\ z+3=2t\end{cases}$ или $\begin{cases}x=2t+3\\ y=3t-1\\ z=2t-3\end{cases}$, затем подставим значения x,y,z в уравнение плоскости и

получим, $3(3+2t)+4(3t-1)+7(2t-3)+24=0$,

$t=-\frac{1}{4}$, и отсюда, подставив это значение в параметрическое уравнение прямой, найдем

координаты точки пересечения: $x=2\frac{1}{2}, y=-1\frac{3}{4}, z=-3\frac{1}{2}$.

Задание 5. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+2}{6x^2+2x-4}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+2}{6x^2+2x-4}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}{6+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ Ответ: $\boxed{\frac{1}{2}}$

б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$;

$$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}=\lim_{x\to-2}\frac{(\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6})(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6})}{(x+2)(x-3)(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6})}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{-2(x+2)}{(x+2)(x-3)(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6})}=Z\lim_{x\to-2}\frac{-2}{(x-3)(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6})}=\frac{1}{10}$$

Ответ: $\boxed{\dfrac{1}{10}}$

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg2x}{5x}$;воспользуемся свойством эквивалентных бесконечно малых величин: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg2x}{5x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{5x}=\dfrac{2}{5}$ Ответ: $\boxed{\dfrac{2}{5}}$

Задание 6. Вычислить производную функции

а) $y=e^{\cos^3 2x}$; $y'=-2e^{\cos^3 2x}\cdot3\cos^2 2x\cdot\sin2x$

б) $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$; $y'=\dfrac{3x^2(x^2-1)-2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$

в) $y=arctg(\ln(x^4+1))$; $y'=\dfrac{1}{1+\ln^2(x^4+1)}\cdot\dfrac{1}{x^4+1}\cdot4x^3=\dfrac{4x^3}{(1+\ln^2(x^4+1))(x^4+1)}$

г) $xy=ctg(x-y)$;

$$y+xy'=-\frac{1}{\sin^2(x-y)}(1-y');\quad y+xy'=-\frac{1}{\sin^2(x-y)}+y'\frac{1}{\sin^2(x-y)};$$

$$y'\left(x-\frac{1}{\sin^2(x-y)}\right)=-\frac{1+y\sin^2(x-y)}{\sin^2(x-y)};\quad y'\left(\frac{x\sin^2(x-y)-1}{\sin^2(x-y)}\right)=-\frac{1+y\sin^2(x-y)}{\sin^2(x-y)};$$

$$y'=-\frac{1+y\sin^2(x-y)}{x\sin^2(x-y)-1}=\frac{1+y\sin^2(x-y)}{1-x\sin^2(x-y)}$$

Задание 7. Исследовать функцию и построить график

а) $y=x^3-9x^2+24x-16$

$D(f)=R$ асимптот нет.

Точки пересечения с осями координат:(0;-16), (1;0), (4,0)

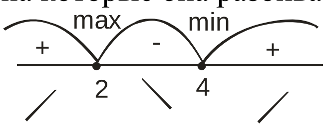
Функция общего вида

Найдем стационарные точки функции: $f'(x)=3x^2-18x-24$,

существуют две критические точки

$x_1=2; x_2=4$, в которых первая производная равна нулю

Исследуем поведение функции на промежутках области определения, на которые она разбивается стационарными точками

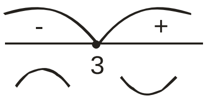


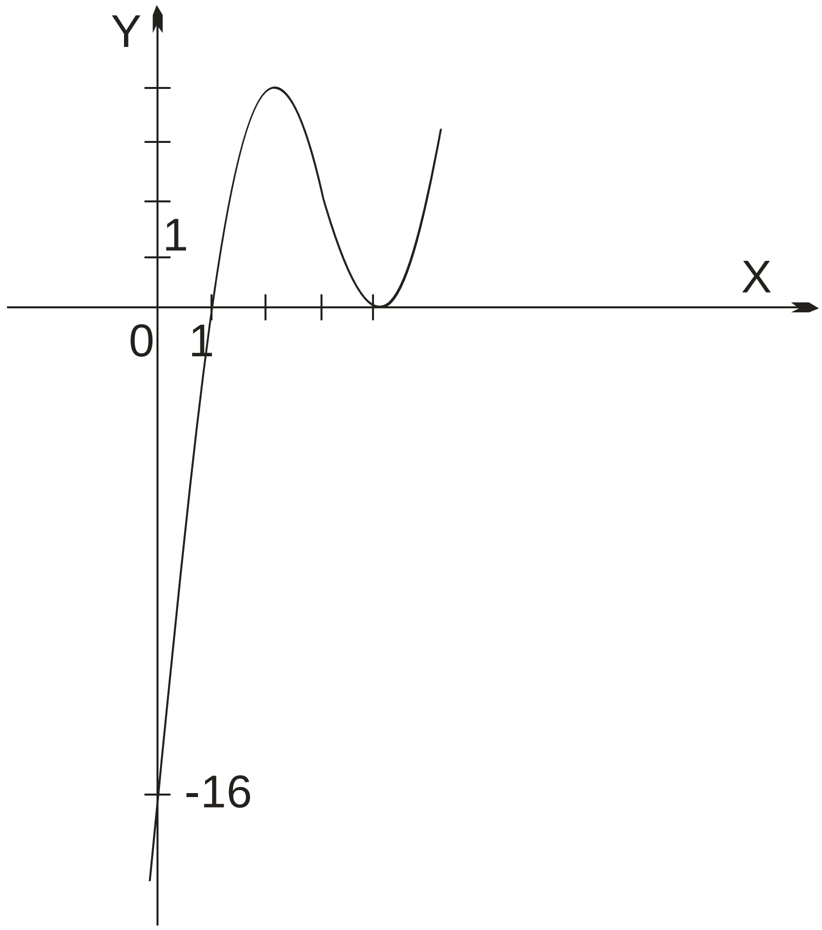
Найдем значения функции в стационарных точках:

$f(2)=4$; $f(4)=0$

С помощью второй производной исследуем функцию на выпуклость и точки перегиба

$y''=6x-18$; $x=3$- стационарная точка второго рода





б) $y=(x-2)e^{3-x}$

$D(f)=R$

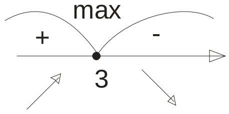
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ - горизонтальная асимптота

Точки пересечения с осями координат:(0;-2e^{3}), (2,0)

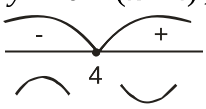
Функция общего вида

$y'=e^{3-x}(3-x)$, критическая точка x=3, $f(3)=1$

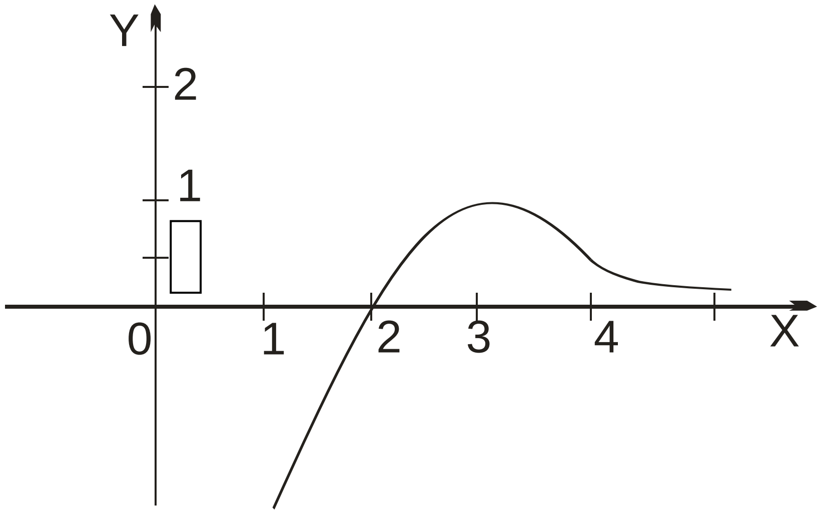


С помощью второй производной исследуем функцию на выпуклость и точки перегиба

$y''=e^{3-x}(x-4)$; $x=4$ - стационарная точка второго рода



, (4;$\frac{2}{e}$)- точка перегиба



Задание 10. Составить уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке x_0.

$$y=\frac{2x}{x^2+1};\ x_0=1$$

Составим уравнение касательной к графику функции в точке x_0=1

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

$f'(x)=\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$, $y'(1)=0$, $y(1)=1$, тогда $y-1=0(x-1)$, $y=1$ - уравнение касательной, x=1 – уравнение нормали

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

$$y=\sqrt[3]{2x^2(x-6)};[-2;4]$$

$y'=\dfrac{2x(x-4)}{\sqrt[3]{(2x^2(x-6))^2}}$ знаменатель дроби всегда будет положительным, значит критические точки $x_1=0$ и $x_2=4$. Обе критические точки принадлежат отрезку. Найдем значения функции на концах отрезка и в критических точках.

$f(-2)=\sqrt[3]{2\cdot(-2)^2\cdot(-2-6)}=-4$;

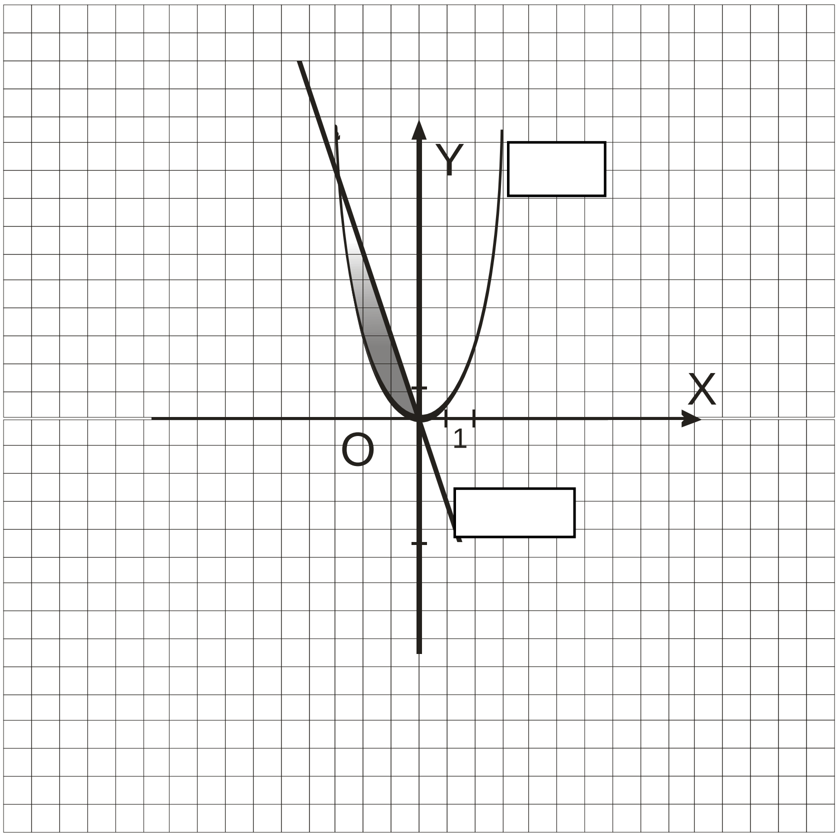
$f(0)=\sqrt[3]{2\cdot 0^2\cdot(0-6)}=0$;

$f(4)=\sqrt[3]{2\cdot 4^2\cdot(4-6)}=-4$, таким образом, $\max\limits_{[-2;4]} f(x)=f(0)=0$ и

$\min\limits_{[-2;4]} f(x)=f(-2)=f(2)=-4$

Задание 9. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями. Постройте график $y=x^2;\ y=-3x$ Чтобы вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=-3x$, найдем их точки пересечения $x^2=-3x$, а значит $x_1=0$ и $x_2=-3$

$$S=\int_{-3}^{0}(-3x-x^2)dx=\left(-\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{0}=13\frac{1}{2}\quad .\quad .$$



Задание 10. Найти общее решение дифференциального уравнения

$y' = \dfrac{xy^2 - x^2 y}{x^3}$ преобразуем уравнение к виду $y' = \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - \dfrac{y}{x}$.

Полагая $y = ux$, находим $y' = u'x + u$. Подставим значения y и y' в данное уравнение

$u'x + u = u^2 - u$. Разделяя переменные и интегрируя, имеем: $\displaystyle\int \frac{du}{u^2 - 2u} = \int \frac{dx}{x}$, откуда

$\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{u-2}{u}\right| = \ln|x| + \dfrac{1}{2}\ln|C|$, то есть $\left|\dfrac{u-2}{u}\right| = x^2|C|$. Возвращаясь к старой переменной,

получаем $\left|\dfrac{y-2x}{y}\right| = x^2|C|$ или $\dfrac{y-2x}{y} = \pm Cx$.

Ответ: $\dfrac{y-2x}{y} = \pm Cx$.

Литература;

основна:

1. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів: 5-те вид. Навч. посіб. — К.: Центр учбової літератури, 2010. — 448 с.
2. Рудавський Ю.К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. /Ю.К.Рудавський, П.П.Костробій, Х.П.Луник, Д.В.Уханська – Л.:Бескид Біт, 2002. – 262с.
3. Рудавський Ю. К. Збірник задач з математичного аналізу: у 2 ч./[Ю. К. Рудавський, П.П. Костробій, Л. Л. Лібацький та ін.]. –Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2003-2008. – Ч. 1. ─ 2008. ─ 352 с.; ч. 2. ─ 2003. ─232 с. 3
4. Рудавський Ю.К., Костробій П.П., Уханська Д.В., Батюк Ю.Р. та ін. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії – Львів: Видавництво «Бескид Біт», 2002. – 256 с.

5. Грисенко М.В. Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2007. -720 с.
6. Макаренко В.О. Вища математика для економістів: Навч. посіб. – К.: Знання, 2008. – 517 с.;
7. Соколенко О.І. Вища математика: Підручник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002. – 432 с.