

Завдання 1. Дано дві матриці A і B. Знайти $A \cdot B$, $B \cdot A$, A^{-1} , $A^{-1} \cdot A$.

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; 2. A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix};$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; 4. A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 11 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 13 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}; 6. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -13 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}; 8. A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix};$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}; 10. A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$11. A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}; 12. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix};$$

$$13. A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}; 14. A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$15. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}; 16. A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$17. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}; 18. A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$19. A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}; 20. A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 5 & -3 & -2 \\ 12 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$21. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 5 & -6 & 4 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}; 22. A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$23. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}; 24. A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix};$$

$$25. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad 26. A = \begin{pmatrix} -3 & -8 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$27. A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad 28. A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$29. A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad 30. A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Завдання 2. Довести сумісність системи і розв'язати її трьома способами: 1) методом Крамера; 2) методом Гаусса; 3) матричним способом (попередньо підставити значення коефіцієнтів, відповідно до варіанту).

$$1) \begin{cases} bx + cy - az = b^2 \\ ax - by + cz = c^2 \\ cx + ay - bz = a^2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} cx + by - az = b^2 \\ -bx + ay + cz = c^2 \\ ax + cy - bz = a^2 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} cx - ay + bz = b^2 \\ -bx + cy + az = c^2 \\ ax + by - cz = a^2 \end{cases}$$

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	1	2	-1	-4	-4	2	-4	-5	3	3	3	-4	2	2	-1
b	3	2	2	6	2	-3	5	2	2	-1	3	2	1	-1	5
c	6	1	1	-3	6	2	1	-4	4	-2	1	1	4	2	-2

Варіант	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a	-2	-2	-1	-2	4	1	5	2	-1	1	-1	4	3	1	2
b	-3	-3	-5	2	3	-5	2	5	-4	2	4	4	2	5	4
c	2	4	2	-3	-3	-2	0	1	3	4	1	-1	1	-1	-3

Завдання 3. З'ясувати компланарність векторів a, b, c?

- | | | |
|-----------------|-------------|--------------|
| 1. a=(3;3;1) | b=(1;-2;1) | c=(2;5;0) |
| 2. a=(3;1;-1) | b=(-2;-1;0) | c=(5;2;-1) |
| 3. a=(4;3;1) | b=(5;1;2) | c=(1;-2;1) |
| 4. a=(4;3;-5) | b=(6;7;4) | c=(2;0;-1) |
| 5. a=(3;7;2) | b=(-2;0;-1) | c=(1;7;1) |
| 6. a=(1;-3;-7) | b=(3;2;1) | c=(-2;-5;-8) |
| 7. a=(1;-2;6) | b=(-1;4;-4) | c=(2;-6;10) |
| 8. a=(6;-3;4) | b=(2;1;-2) | c=(-4;4;-6) |
| 9. a=(-2;7;-1) | b=(-3;5;2) | c=(1;2;-3) |
| 10. a=(2;-3;1) | b=(4;5;3) | c=(-2;8;2) |
| 11. a=(-1;0;1) | b=(2;-7;1) | c=(-3;7;0) |
| 12. a=(1;-3;2) | b=(-2;7;3) | c=(-1;4;5) |
| 13. a=(-4;1;-2) | b=(1;2;-7) | c=(-6;6;18) |
| 14. a=(-2;5;8) | b=(0;-1;2) | c=(-1;2;5) |
| 15. a=(3;-4;11) | b=(1;2;1) | c=(-2;1;-5) |
| 16. a=(-4;1;7) | b=(0;-5;-1) | c=(2;2;-3) |

17. a=(-2;-4;1)	b=(0 ;2 ;-3)	c=(2; 6 ;-4)
18. a=(4;-3;1)	b=(2 ;-1;1)	c=(2 ;-2;0)
19. a=(-3;4;0)	b=(1;-1;2)	c=(5;-7;-2)
20. a=(-3;-4;3)	b=(5; 2 ;-1)	c=(-2;2 ;-2)
21. a=(-5;0;-2)	b=(1;-4;0)	c=(2;2;1)
22. a=(1;5;-4)	b=(-3;1 ;2)	c=(1;-3;1)
23. a=(-2;3;5)	b=(0;-1;1)	c=(1;-1;-3)
24. a=(1;-5;-9)	b=(5; 1;-3)	c=(-3;2;6)
25. a=(0;-1;4)	b=(-4;1;6)	c=(2;0;-5)
26. a=(8;3;-2)	b=(-4;-1;8)	c=(-2;-1;-3)
27. a=(4;-1;0)	b=(0;3;4)	c=(-2;2;2)
28. a=(-1;2;-3)	b=(-5;8;-1)	c=(3;-5;2)
29. a=(8;3;-2)	b=(-6;-1;0)	c=(2 ;2;-2)
30. a=(-1;2;-3)	b=(5 ;-8;1)	c=(2;3;1).

Завдання 4. Знайти кут між прямою і площиною і точку їх перетину:

- $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}; x+2y+3z-14=0$
- $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5}; x+2y-5z+20=0$
- $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2}; x-3y+7z-24=0$
- $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2}; 2x-y+4z=0$
- $\frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0}; 3x+y-5z-12=0$
- $\frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}; x+3y-5z+9=0$
- $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-14}; x-2y+5z+17=0$
- $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{1}; x-2y+4z-19=0$
- $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+4}{-1}; 2x-y+3z+23=0$
- $\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{0}; 2x-3y-5z-7=0$
- $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}; 4x+2y-z-11=0$
- $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-1}; 3x-2y-4z-14=0$
- $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}; x+2y-z-2=0$
- $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+2}{3}; 5x-y+4z+3=0$
- $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{3}; x+3y+5z-42=0$
- $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-4}{2}; 7x+y+4z-47=0$
- $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{5}; 2x+3y+7z-52=0$
- $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2}; 3x+4y+7z+24=0$
- $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{-1}; 2x-5y+4z+24=0$
- $\frac{x-1}{8} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z+5}{12}; x-2y-3z+18=0$
- $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{0}; x+7y+3z+11=0$
- $\frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{2}; 3x+7y+3z+11=0$
- $\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-1}; 4x+y-6z-5=0$
- $\frac{x-3}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-8}{0}; 5x+9y+4z-25=0$
- $\frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{3}; 3x-2y+5z-3=0$
- $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-3}{-2}; x+2y-5z+16=0$
- $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+2}{-2}; 3x-7y-2z+7=0$
- $\frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+5}{11}; 5x+7y+9z-32=0$
- $\frac{x-7}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}; 2x+y+7z-3=0$
- $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{-2}; 3x-y+4z=0$

Завдання 5. Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

1. a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 + x - x^2}{x^3 - 27}$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x^2 - 2}{4x^3 - x + 5}$ в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}$
2. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{3x^2 + 2x - 5}$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 5}{4x^3 + 3x + 1}$ в) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21}$
3. a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{9x^2 + 17x - 2}{x^2 + 2x}$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 6x - 2}{5x^2 - 6}$ в) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+20} - 4}{x^3 + 64}$
4. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - x^2}{x^2 + 3x + 2}$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 + 7}{4x^5 + x + 1}$ в) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3}}{x^2 + x - 2}$
5. a) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{x^2 - \frac{1}{4}}$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - x^4}{1 + 8x^3 - 2x^4}$ в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 2x}$
6. a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 5x + 6}$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{5x^2 + 4x + 7}$ в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{2x^2 + 3x - 5}$
7. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + x + 2}{2x^2 + 3x + 1}$ б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 2x - 16}{2 - x}$ в) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{\sqrt{x+2} - 3}$
8. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 + 3x}{7x^4 + x + 4}$ в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x - 10}{\sqrt{3x+3} - 3}$
9. a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 + 3x - 18}$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 7}{3x^2 + 4}$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{2x^2 + x}$
10. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{\sin 5x - \sin 3x}$ б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{x^2 + 3x - 28}$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x+4} - 2}$
11. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2}$ б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$
12. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x}$ б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^3 - 2x^2 + x}$ в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{1+2x} - 3}$
13. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos 5x}$ б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 3x + 2)^2}{x^4 - 1}$ в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{3x} - 3}$
14. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 3x}{\cos x - \cos^3 x}$ б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 3x + 2)^2}{x^4 - 1}$ в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$
15. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{x^4}$ б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + 5x - 14}$ в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 2}{x^2 - x}$
16. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^4 x}{x \sin 2x}$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x^5 + x}$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2 + 2x^4}$
17. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \operatorname{tg} 5x}$ б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$ в) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{\sqrt{2x+7} - 5}$
18. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{1 - \cos x}$ б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4x - 12}{x^3 + 8}$ в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}}{\sqrt{2x+3} - 3}$
19. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + (1-x)^3}{(6-x)^2}$ б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 4x^2 + 3x}$ в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2x}}$

20. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)^3 - (x-2)^3}{(4-x)^2}$ б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^3 - 27}$ в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{4x+5} - 5}{\sqrt{x+4} - 3}$
21. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 2}{6x^3 - 4x + 3}$ б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{4}}{x^2}$
22. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 4x - x^4}{x + 3x^2 + 2x^4}$ б) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 8}$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}$
23. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^6 - x^3 + 2x}{2x^6 - 1}$ б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21}$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^5 x}{x^2}$
24. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{6x^2 + 2x - 4}$ б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6}$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 2x}{5x}$
25. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 4x^2 + 3}{2x^4 + 1}$ б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+4}}{3x^2 - 4x + 1}$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 8x}$
26. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 4x^2 - 5}{4x^2 - 3 + 2}$ б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}}$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$
27. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^5 - 2x^2 + 5}{5x^5 + 2x - 1}$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 1} - x)$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 1}{x \operatorname{tg} 2x}$
28. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 6x^2 + 2}{x^4 + 4x + 2}$ б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x \sin 2x}$
29. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 6x - 3}{x^3 - 2x^2 + 4}$ б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6}}{2x^2 - 7x - 15}$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\operatorname{ctg} 5x}$
30. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x^2 + 3x}{7x^2 + 2x - 8}$ б) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}{x^2 + 8x + 15}$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 3x}{\cos x - \cos^3 x}$

1. Завдання 6. Обчислити похідну функції.

2. а) $y = \frac{8x^4 \sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x} + 7$; б) $y = \ln \sqrt{\frac{1-3x^2}{1+3x^2}}$; в) $y = \ln \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$; г) $y = \frac{2x}{\sqrt{1+x}} - 4\sqrt{1+x}$.
3. а) $y = \frac{6x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x^2} + 5$; б) $y = (3-2x)\sqrt{3-4x^2}$; в) $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; г) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$.
4. а) $y = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 + x^2}}$; б) $y = 3^{\sqrt{x^2+1}} - e^{\ln \sqrt{x^2-4}} + \sqrt{7}$; в) $y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; г) $y = \ln \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x}$.
5. а) $y = \sqrt[3]{(1-x)^2}$; б) $y = \operatorname{arctg} \frac{1-x^2}{2x}$; в) $y^2 + x^4 = x^2$; г) $y = \ln \frac{ae^x}{bx^2 + c}$.
6. а) $y = (2-3x^2)\sqrt{3x^2+1}$; б) $y = 3 \log_5 \sqrt[3]{3x-x^3} + \sqrt{\pi}$; в) $y = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}$; г) $y = 7^{\frac{1}{x+3}}$.
7. а) $y = \frac{3x-4}{\sqrt{x^3+3x-2}}$; б) $y = (3^{\sin 2x} - \cos^2 2x)^3$; в) $y = \ln \arcsin \sqrt{1-x^2}$; г) $y^2 + x^2 - 2y = 0$.
8. а) $y = (2x+3)^{\operatorname{tg} x}$; б) $y = \ln \sqrt[3]{\frac{2-x^2}{x^3-6x}}$; в) $y = \frac{2x}{\sqrt{x^3-5x^2+3}}$; г) $y = (3^{\cos 3x} - \sin^2 3x)^3$.
9. а) $y = \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{2x-1}$; б) $y = \ln \sqrt{\frac{x^2+3}{x^3+9x}}$; в) $y = (x^3+2)^{\sin x}$ г) $e^x - x - y^3 = 0$.

10. a) $y = \frac{x+3}{\sqrt{x^2-6x-9}}$; б) $y = (2^{\arctg x} + \ln(1+x^2))^4$; в) $y = \ln(\operatorname{tg} x^2)$; г) $y = \ln \sqrt[4]{\frac{3x^2+2}{x^3+2x}}$.
11. a) $y = (1+\cos x)^{x^2}$; б) $\sin x - \arctg y = 0$; в) $y = \frac{3x}{\sqrt{x^3-4x^2+1}}$; г) $y = (2^{\arcsin x} + \arccos x)^4$.
12. a) $y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{x-1}$; б) $y = \ln \sqrt[3]{\frac{2x^2-2}{x^3-3x}}$; в) $y = (x^2+1)^{\arctg x}$; г) $x + \ln x + \sqrt{3+2y} = 0$.
13. a) $y = \frac{4x}{\sqrt{x^3+5x^2-2}}$; б) $y = (5^{\operatorname{tg} 2x} - x^2)^3$; в) $e^{\arctg^2 \sqrt{2x-1}}$; г) $y = \ln \sqrt[4]{\frac{x^2+4}{x^3+12x}}$.
14. a) $y = (\arcsin x)^{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\operatorname{ctg} x + \ln \sqrt{4y+1} = 0$; в) $y = \arctg \frac{2x^4}{1-x^8}$; г) $y = \log_2 \sin^2 x$.
15. a) $y = \frac{4x+1}{\sqrt{x^2-16x-2}}$; б) $y = (4^{\operatorname{tg} \sqrt{x}} + \sqrt{x})^3$; в) $y = \arcsin \sqrt{1-4x^2}$; г) $y = \ln \sqrt[3]{\frac{3-x^2}{x^3-9x}}$.
16. a) $y = (x+\sin x)^{x^3}$; б) $e^x - x^2 - e^y = 0$; в) $y = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+4x-3}}$; г) $y = (3^{\arctg 2x} - \ln(1+4x^2))^4$.
17. a) $y = \ln \sin 2x^2$; б) $y = \ln \sqrt[5]{\frac{4-3x^2}{x^3-4x}}$; в) $y = (\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{tg} 2x}$; г) $2x - \sin 2x - y^2 = 0$.
18. a) $y = \frac{3x-8}{\sqrt{x^2+3x-4}}$; б) $y = (2^{\cos^2 x} + \sin^2 x)^3$; в) $y = e^{\arcsin \sqrt{1-x}}$; г) $y = \ln \sqrt[4]{\frac{5-x^2}{x^3-15x}}$.
19. a) $y = (x+1)^{\arctg \sqrt{x}}$; б) $\arctg x - \ln \sqrt{2y+3} = 0$; в) $y = \frac{2x^3+5}{\sqrt{x^4+2x}}$; г) $y = (4^{\arccos 2x} - \sqrt{1-4x^2})^3$.
20. a) $y = \ln \arcsin \frac{2}{\sqrt{x}}$; б) $y = \ln \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2-3x}}$; в) $y = (\operatorname{ctg} 4x)^{\sin 4x}$; г) $\operatorname{tg} x - \sqrt{4y+5} + 2 = 0$.
21. a) $y = \frac{x^3-10}{\sqrt{x^4-8x}}$; б) $y = (6^{\arctg 3x} + \arctg 3x)^4$; в) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{x}}$; г) $y = \ln \sqrt[3]{\frac{10-3x^2}{x^3-10x}}$.
22. a) $y = (x+\ln x)^{\frac{1}{x}}$; б) $x \ln x + e^y + 1 = 0$; в) $y = \ln \sqrt{2x^3+3} + \frac{2}{2x^3+3}$; г) $y = \arctg \sqrt{x^2-1}$.
23. a) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2+1}$; б) $y = x \sin^2 4x$; в) $y = \frac{\arcsin 2x}{\ln x}$; г) $e^y = 4x - 7y$.
24. a) $y = \ln \cos \frac{3}{x}$; б) $y = \sqrt{1+\sin^2 x}$; в) $y = e^{\arctg 2x} \operatorname{tg} 4x$; г) $\operatorname{tg} \frac{y}{x} = 5x$.
25. a) $y = e^{\cos^3 2x}$; б) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$; в) $y = \arctg(\ln(x^4+1))$; г) $xy = \operatorname{ctg}(x-y)$.
26. a) $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$; б) $y = \frac{1}{\pi} \arcsin(\operatorname{tg} 2x)$; в) $y = \frac{e^{x^3}}{x^2+1}$; г) $x - y + \arctg y = 0$.
27. a) $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$; б) $y = (\sin^2 4x) \ln x$; в) $y = e^{\arcsin^2 4x}$; г) $y^3 = \operatorname{tg}(x+y)$.
28. a) $y = \frac{\sin^2 3x}{3}$; б) $y = \ln \cos e^{2x}$; в) $y = \sqrt[4]{\operatorname{arctg} 4x}$; г) $\sin y = xy^2 + 5$.
29. a) $y = x^3 e^{\operatorname{tg} 3x}$; б) $y = \ln \sin \sqrt{x^2+1}$; в) $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$; г) $y = x^{\ln x}$.
30. a) $y = \operatorname{arctg}^{-2} x$; б) $y = 2^{-x} \cos 4x$; в) $y = \ln \operatorname{tge}^{4x}$; г) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{5}$.

a) $y = \frac{\ln^5 x}{x}$; б) $y = x^2 \sin^2 3x$; в) $y = e^{\arcsin \sqrt{x}}$; г) $y = 2tg^3(x^2 + 1)$.

Завдання 7. Дослідити функцію і побудувати її графік.

1.a) $y = \frac{x^3 - 2x + 2}{x - 1}$ б) $y = x - \ln(1 + x^2)$ 2.a) $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ б) $y = -\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

3.a) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 - 5$ б) $y = \frac{3x}{\sqrt{x-1}}$ 4.a) $y = \frac{(x+3)^2}{x-4}$ б) $y = 2\ln\left(\frac{x-3}{x}\right) - 3$

5.a) $y = \frac{x+1}{(x-1)^2}$ б) $y = \ln(x+2) - x - 4$ 6.a) $y = \frac{x^4}{2} - x^2 + 3$ б) $y = x + \ln(x^2 - 3)$

7.a) $y = \frac{5x^2}{x^2 + 1}$ б) $y = x \cdot \exp\left(-\frac{x^3}{3}\right)$ 8.a) $y = \frac{2x}{1-x^2}$ б) $y = 2\arctg x - x$

9.a) $y = x + \frac{1}{3x^3}$ б) $y = xe^{-2x^2}$ 10.a) $y = \frac{x^2 + 6}{x^2 - 1}$ б) $y = e^x + e^{-x}$

11.a) $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$ б) $y = \ln(2x^2 + 3)$ 12.a) $y = x + \frac{1}{x^2}$ б) $y = \frac{\ln x}{x}$

13.a) $y = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2$ б) $y = e^{\frac{1}{x}}$ 14.a) $y = \frac{8x}{(x-2)^2}$ б) $y = 2x \ln x$

15.a) $y = \frac{x^2}{2(x-1)}$ б) $y = \ln(x^2 + 6x + 10)$ 16.a) $y = \frac{x^2 + x - 5}{x - 2}$ б) $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$

17.a) $y = \frac{4x^3}{3(x^2 + 1)}$ б) $y = (2x+1)e^{-x}$ 18.a) $y = \frac{x^3}{3(x^2 - 3)}$ б) $y = \ln(x^2 + 4x + 5)$

19.a) $y = \frac{2(x-1)^2}{x^2}$ б) $y = e^{x^2 - 4x + 3}$ 20.a) $y = \frac{2x^3}{(x-1)^2}$ б) $y = (x+4)e^x$

21.a) $y = x^3 - 10x^2 + 28x - 24$ б) $y = (2x+3)e^{-2(x+1)}$

22.a) $y = x^3 - 3x^2 - 24x - 20$ б) $y = 3\ln\frac{x}{x-3} - 1$

23.a) $y = x^3 - 18x^2 + 60x - 72$ б) $y = \frac{e^{2-x}}{2-x}$ 24.a) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$ б) $y = (x-2)e^{3-x}$

25.a) $y = x^3 - 11x^2 + 39x - 45$ б) $y = 3 - 3\ln\frac{x}{x+4}$

26.a) $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$ б) $y = (2x+5)e^{-2(x+2)}$

27.a) $y = x^3 - 18x^2 + 105x - 196$ б) $y = (2x-1)e^{2(1-x)}$

28.a) $y = x^3 - x^2 - 5x + 3$ б) $y = 2\ln\frac{x}{x+1} - 1$

29.a) $y = x^3 + 10x^2 + 32x + 32$ б) $y = 2\ln\frac{x}{x-4} - 3$

30.a) $y = x^3 - 12x^2 + 45x - 54$ б) $y = (3-x)e^{x-2}$

Завдання 8. Знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку.

1. $y = \ln(x^2 - 2x + 2); [0; 3]$ 2. $y = 3x(x^2 + 1)^{-1}; [0; 5]$ 3. $y = x \cdot e^x; [-2; 0]$ 4. $y = \frac{x}{9-x^2}; [-2; 2]$

5. $y = \frac{\ln x}{x}; [1; e]$ 6. $y = 108x - x^4; [-1; 4]$ 7. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1; [-2; 2,5]$

8. $y = x - 2 \ln x; [1; e]$

9. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2; [-2; 4]$

10. $y = \frac{x^5 - 8}{x^4}; [-3; -1]$

11. $y = 3 - x - \frac{4}{(x+2)^2}; [-1; 2]$

12. $y = \sqrt[3]{2x^2(x-3)}; [-1; 6]$

13. $y = \frac{2(-x^2 + 7x - 7)}{x^2 - 2x + 2}; [1; 4]$

14. $y = x - 4\sqrt{x+2} + 8; [-1; 7]$

15. $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}; [1; 5]$

16. $y = \frac{4x}{4+x^2}; [-4; 2]$

17. $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8; [-4; -1]$

18. $y = \sqrt[3]{2x^2(x-6)}; [-2; 4]$

19. $y = \frac{-2x(2x+3)}{x^2 + 4x + 5}; [-2; 1]$

20. $y = -\frac{2(x^2 + 3)}{x^2 + 2x + 5}; [-5; 1]$

21. $y = \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}; [0; 4]$

22. $y = \frac{x^2 - 2x + 16}{x-1} - 13; [2; 5]$

23. $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)} - 1; [0; 6]$

24. $y = 2\sqrt{x-1} - x + 2; [1; 5]$

25. $y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)}; [-3; 4]$

26. $y = 8x + \frac{4}{x^2} - 15; [0; 5; 2]$

27. $y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(x-4)} + 3; [-4; 2]$

28. $y = x^2 + 4x + \frac{16}{x+2} - 9; [-1; 2]$

29. $y = \frac{4}{x^2} - 8x - 15; [-2; -0,5]$

30. $y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(x-2)}; [-2; 5]$

Завдання 9. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями. Побудувати графік.

1. $y = x^2; y = 3x + 4$ 2. $y = \sqrt{x}; y = x^5$ 3. $y = x^3; y = 2x$ 4. $y = 4 - x^2; y = 0$

5. $y = 2x - \frac{x^2}{4}; y = \frac{x}{4} + \frac{3}{2}$

6. $y = x^2; y = \sqrt{x}$

7. $y = x^2 - 4x + 5; x - y + 5 = 0$

8. $y = x^2 - 4x + 4; y = x$

9. $y = 3x - \frac{x^2}{2}; y = x$

10. $y = \frac{x^3}{3}; y = 3x$

11. $y = \frac{4}{x}; x + y - 5 = 0$

12. $y = \frac{8}{x}; x + y - 9 = 0$

13. $y = x^3; y = 2x$

14. $y = x^2 - 2x + 3; x - y + 3 = 0$

15. $y = x^2 - 4x; x = 0; x = 5; y = 0$

16. $y = -x^2 + 4x; y = 0$

17. $y = -\frac{x^2}{4} + x + 3; y = 0$

18. $y = x^2; y = -3x$

19. $y = 3x^2 + 1; y = 3x + 7$

20. $y = x^3; y = \sqrt{x}$

21. $y = -x^2 + 2x; y = 0$

22. $xy - 4 = 0; x = 1; x = 4; y = 0$

23. $x^3 - 4y = 0; y = 0; x = 2$

24. $2y - x^3 = 0; y = 0; x + 1 = 0; x - 2 = 0$

25. $xy = 1; x = 2; x = 3$

26. $y = \frac{1}{4}x^3; y = x$

27. $y = x^2 - 6x + 5; y = 0$

28. $xy - 2 = 0; x = 1; x = 4$

29. $y = \sqrt{2x}; x = 1; x = 9$

30. $y = x^2; y = 3 - 2x$

Завдання 10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $xy' + y = y^2$

2. $y(1+x) - (1-y)xy' = 0$

3. $x(y^2 + 1)dx - (1 - x^2)ydy = 0$

4. $x^2y - y = y^2$

5. $xyy' = 1 - x^2$

6. $y' + \frac{2}{x}y = x^3$

7. $y' + y = e^x$

8. $y' + 2xy = xe^{-x}$

9. $y - xy' = 1 + x^2$

10. $xy' + y = 3$

11. $y'tgx - y = 2$

12. $(1+y) - (1-x)y' = 0$

13. $(1+x^2)y' - \sqrt{1-y^2} = 0$

14. $x^2y' + (y-2) = 0$

15. $y-1 = x(x+1)y'$

16. $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1$

17. $y' + 2xy = -4x$

18. $xy' - 2y = 2x^4$

19. $y' - yctgx = \sin x$

20. $y' + \frac{y}{1+x} = -x^2$

21. $y' - 2y = \frac{e^{2x}}{x^4}$

22. $xy' = y + xe^{\frac{2y}{x}}$

$$23. y' = xy^3 + 4xy \quad 24. y' = \frac{xy + \sqrt{xy^3}}{x^2} \quad 25. y' = -\frac{y}{x} + \frac{\cos 6x}{x} \quad 26. y' = \frac{x \sin 2x \sqrt{y^2 + 4}}{y}$$

$$27. y' = \frac{2y^3 - xy^2}{x^3} \quad 28. y' - \frac{y}{x+2} = x \quad 29. y' = y \operatorname{ctg} x + 2x \sin x \quad 30. y' + \frac{2y}{x} = \frac{\ln x}{x^4}$$