МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВІДОРЕМЛЕНИЙ СТРУКТУРНИЙ ПІДРОЗДІЛ
МАРІУПОЛЬСЬКИЙ МАШИНОБУДІВНИЙ ФАХОВИЙ КОЛЕДЖ
ДЕРЖАВНОГО ВИЩОГО НАВЧАЛЬНОГО ЗАКЛАДУ
«ПРИАЗОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ
ОБОВ'ЯЗКОВОЇ ОСВІТНЬОЇ КОМПОНЕНТИ
НАВЧАЛЬНА ДИСЦИПЛІНА: «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Освітньо-професійної програми «Технічне обслуговування і ремонт устаткування підприємств машинобудування»

Галузь знань 13 «Механічна інженерія»

Спеціальність 131 «Прикладна механіка»

Освітньо-професійний рівень «Фаховий молодший бакалавр»

для студентів заочної форми навчання

2020

Контрольна робота містить 30 варіантів завдань що охоплюють усі темі курсу.
Викладач дає необхідні консультації. Для самоконтролю складені конкретні питання. Також викладені основні питання, необхідні для успішного засвоєння програми і розв'язані типові задачі.
Найменування розділів і тем
1. Розв'язування систем лінійних рівнянь.
2. Вектори та дії з ними.
3. Похідна першого та вищих порядків.
4. Будування графіків функцій за допомогою похідної.
5. Інтеграл та його застосування.
6. Диференціальні рівняння
7. Теорія ймовірностей
8. Основни поняття й методи математичної статистики
9. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування.
10. Графічній метод

1.Рішення систем лінійних рівнянь.

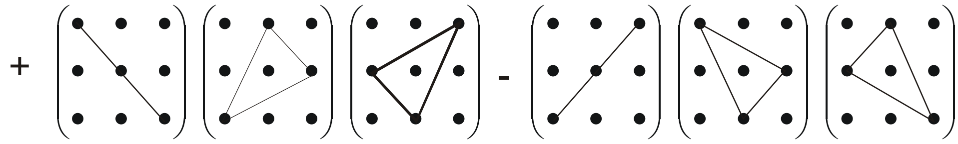
Визначники. Рішення і дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Метод Джордана-Гауса. Метод Крамера.

1. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ - визначник другого порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \text{ або}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \text{ - визначник третього порядку.}$$

Правило трикутників (Сарруса) обчислення визначників третього порядку.



Позначимо точками елементи визначника, тоді доданки зі знаком «плюс» — це добутки елементів a_{11}, a_{22}, a_{33}, розміщених на *головній діагоналі* визначника, і добутки елементів a_{13}, a_{21}, a_{32} і a_{12}, a_{23}, a_{31}, розміщених у вершинах рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні головній діагоналі. Зі знаком «мінус» беруться доданки, що є добутками елементів a_{13}, a_{22}, a_{31}, розміщених на сторонній діагоналі визначника, та у вершинах рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні сторонній діагоналі визначника — a_{11}, a_{23}, a_{32} і a_{12}, a_{21}, a_{33}.
Запропонуємо ще одне правило обчислення визначника третього порядку (правило Саррюса).
У початковому визначнику за третім стовпцем запишемо ще раз перший і другий стовпці:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Для знаходження визначника за цим правилом треба утворити зі знаком «плюс» алгебраїчну суму добутків елементів, розміщених на головній діагоналі визначника, і на діагоналях, паралельних їй, а зі знаком «мінус» — добутків елементів, розміщених на сторонній діагоналі, та на діагоналях, паралельних їй.

Приклад 1.Обчислити визначник за правилом Саррюса.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix}\Bigg| = 1\cdot 2\cdot 0 + 0(-4)\cdot 1 + (-2)\cdot 3\cdot 2 -$$

$$-(-2)\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot(-4)\cdot 2 - 0\cdot 3\cdot 0 = -12 + 4 + 8 = 0.$$

2. Розв'язання систем лінійних рівнянь за правилом Крамера:

$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$	$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$, де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$, $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

3. Рішення систем лінійних рівнянь методом Гауса: перетворення складається з декількох кроків, на кожнім з який виключається одне невідоме, для чого можна додавати до обох частин одного рівняння інше рівняння системи, помножене на деяке число.

Приклад *2*. Вирішити по формулах Крамера систему рівнянь :

$\begin{cases} x - y + z = 5 \\ 2x + y + z = 6 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$ Визначник цієї системи: $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Обчислимо

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15;\quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -5;\quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5$$. Звідси

$$x = \frac{D_x}{D} = 3; y = \frac{D_y}{D} = -1; z = \frac{D_z}{D} = 1 .$$

Приклад 3. Вирішити методом Гауса систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + 2z = 8 \\ 5x - 3y + 2z = 5 \\ x + 3y + 3z = 16 \end{cases} \qquad 1)\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + 2z = 8 \\ 11y + 16z = 70 \\ \frac{5}{2}y + z = 8 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + 2z = 8 \\ 11y + 16z = 70 \\ 29z = 87 \end{cases}$$

- З першого рівняння системи знаходимо x і підставляємо його в друге і третє рівняння. У результаті отримаємо нову систему 1).
- З другого рівняння системи 1) знаходимо у і підставляємо його в третє рівняння
- Виконуючи зворотний хід у системі 2), отримаємо x=1, y=2,z=3.

Питання для самоперевірки.

1. Що називається визначником?
2. Основні властивості визначників.

3. Опишіть методи Гауса і Крамера розв’язування систем лінійних рівнянь.

2. Вектори і дії з ними.

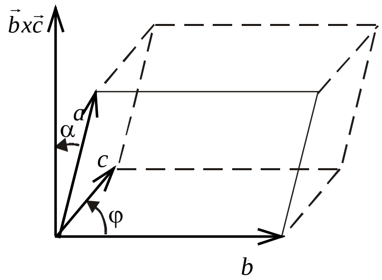
Метод координат, вектори. Лінія і пряма на площині. Лінії іншого порядку. Пряма і площина в просторі.

1. Вектори в просторі. Якщо вектори компланарні, то їх мішаний добуток у координатах дорівнює нулю.

$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$. *Векторним добутком вектора* $\vec{a}$ *на вектор* $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, якщо:

1) *довжина вектора* $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, де φ — кут між двома векторами;

2) *вектор* $\vec{c}$ *перпендикулярний* до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;



2. Рівняння лінії і поверхні у простори. Загальне рівняння площині Ax+By+Cz+D=0.

Параметричні рівняння прямої: $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$

Канонічні рівняння прямої: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

Кут між прямою та площиною: $\sin\varphi=\dfrac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

Перетин прямої і площини: $(Am+Bn+Cp)t+(Ax_0+By_0+Cz_0+D)=0$.

Приклад *1*. Знайти точку перетину прямої $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ і площині 3x-2y+z-3=0.

Перейдемо від канонічних рівнянь прямої до параметричних: x=-1+2t; y=2+t;z=1-t. Підставимо значення x,y і z в рівняння площини: 3(-1+2t)-2(2+t)+(1-t)-3=0, звідки знайдемо, що t=3. Підставивши отримане значення t в параметричні рівняння прямої, знайдемо координаті точки перетину: x=5,y=5, z=-2.

Приклад *2*. Перевірити , чи компланарні вектори $\vec{a}$ (-1;-1;6), $\vec{b}$ (-2;0;2) $\vec{c}$ (1;-1;4)?

$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}=0$, отже вектори компланарні.

Лінії другого порядку.

Канонічне рівняння кола: $x^2+y^2=R^2$, Рівняння кола з центром в точці $(x_0;y_0)$ $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

Канонічне рівняння еліпса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, де a - велика піввісь еліпса; b – мала піввісь ; x і y – поточні координати точок еліпса. $F_1(c;0), F_2(-c;0); c=\sqrt{a^2-b^2}; \varepsilon=\frac{c}{a}<1$. Рівняння еліпса з осями паралельними до осей координат, і з центром в точці (x_0;y_0): $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$.

Канонічне рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ c=\sqrt{a^2+b^2}; \varepsilon=\frac{c}{a}>1$. Асимптоти гіперболи: $y=\pm\frac{b}{a}x$. Спряжені гіперболи: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ і $\frac{x_2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$. Рівняння гіперболи з осями паралельними до осей координат, дійсна вісь паралельна оси абсцис і з центром в точці (x_0;y_0): $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$.

Канонічне рівняння параболи $y^2=2px$. $F\left(\frac{p}{2};0\right)$; Якщо парабола симетрична відносно оси ординат, а вершина міститься в початку координат, то Її рівняння має вигляд $x^2=2py$. Якщо парабола симетрична відносно прямої $y=y_0$ а вершина міститься в точці (x_0;y_0), то Її рівняння має вигляд
$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$.Якщо парабола симетрична відносно прямої $x=x_0$,а вершина міститься в точці (x_0;y_0), то Її рівняння має вигляд $(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$.

Приклад *3*. Встановити вид кривої $x^2-4x+4y+12=0$.
Якщо виділити повний квадрат, то отримаємо $(x-2)^2=-4(y+2)$. Отже парабола з вершиною в точці (2;-2) і параметром p=2.

Питання для самоперевірки.

1. Напишіть рівняння рівнобічної гіперболи.
2. Напишіть рівняння асимптот гіперболи.
3. Що називається ексцентриситетом еліпса і яка його величина в порівнянні з одиницею.
4. Які гіперболи називаються спряженими?
5. Дайте визначення окружності, еліпса, гіперболи і параболи.

3.Похідна першого і вищих порядків.

Похідна на прикладі фізичного і геометричного змісту вираження. Застосування похідної. Диференціал функції і його застосування. Основні теореми диференціального числення. Похідні і диференціали вищих порядків.
Похідною функції y=f(x) в точці $x=x_0$ називається швидкість змінювання функції в цій точці. Воно дорівнює границі відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля. Операція знаходження похідної називається діференцюванням функції; функція яка має похідну у цій точці, називається діференційовною у цій точці.

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_x=f'(x)=\frac{dy}{dx}.$$

Похідна функції.

$y'=f'(a)=\lim\limits_{\Delta x\to x_0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ - похідна функції $y=f(x)$ в точці $x=a$.

$\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$ - збільшення функції $y=f(x)$ в точці $x=a$. $f'(a)=tg\alpha$ - тангенс кута нахилу дотичної, проведеної до графіка функції $y=f(x)$ в точці $x=a$.

Основні правила диференціювання.

1. $C' = 0, (C = const)$ 2. $(C \cdot U)' = C \cdot U'$ 3. $(U \pm V)' = U' \pm V'$

4.. $(U \cdot V)' = U' \cdot V + V' \cdot U$ 5. $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$.

Похідна складеної функції.

Якщо $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$,то $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Похідна оберненої функції: $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

Похідна функції, заданої параметрично.

$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \alpha < t < \beta$,t - параметр; $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Похідна другого порядку функції, заданої параметрично.

$$y''_x = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^3} .$$

Таблиця похідних.

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$; 1а). $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; 1б). $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; 2. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$;

2а). $\left(e^x\right)' = e^x$;

3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$; 3а). $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$; 4. $\left(\sin x\right)' = \cos x$; 5. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$;

1) $\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; 7. $\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$; 8. $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

9. $\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; 10. $\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1 + x^2}$; 11. $\left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1 + x^2}$;

12. $\left(shx\right)' = chx$; 13. $\left(chx\right)' = shx$; 14. $\left(thx\right)' = \frac{1}{ch^2 x}$; 15. $\left(cthx\right)' = -\frac{1}{sh^2 x}$.

Наближене обчислення значень функції.

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x .$$

Логарифмічна похідна.

При перебуванні похідних від показової-степеневої функції, а також інших громіздких виражень, що допускають логарифмування зручно застосовувати логарифмічну похідну, тобто похідну від логарифма цієї функції:

$(\ln y)' = \frac{y'}{y}$, тоді похідна показової-степеневої функції має вид - $(u^v)' = u^v \cdot v' \cdot \ln u + u^{v-1} \cdot u' \cdot v$.

Приклад *1*. Обчисліть похідну. $y=x^{\sin x}$

$$\ln y = \ln x^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \sin x \cdot \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \Rightarrow y' = x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}) .$$

Діференцювання неявної функції.

Щоб знайти похідну від неявної функції треба:

1) Продіференцювати кожний доданок, що входить у рівняння.
2) При цьому до виразів, які містять y, треба застосувати правило диференціювання складеної функції.
3) Із отриманої рівності знаходимо y' .

Приклад *2*. Знайти y':$x^2+y^2-25=0$.

$2x+2y\,y'=0$; $y'=-\dfrac{x}{y}$.

Приклад *3*. Знайти похідну функції y=lncos5x.

Спочатку скористаємося формулою $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$, $y'=\dfrac{(\cos 5x)'}{\cos 5x}$. Потім застосуємо формулу $\left(\cos x\right)'=-\sin x$, $y'=\dfrac{-\sin 5x\cdot(5x)'}{\cos 5x}$.Нарешті, виносимо сталий множник і отримаємо:

$y'=\dfrac{-\sin 5x\cdot 5}{\cos 5x}=-5tg5x$.

Питання для самоперевірки

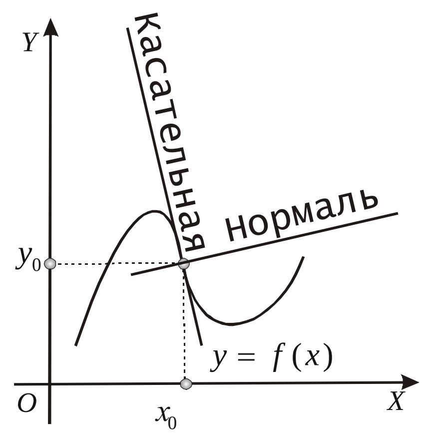
1. Дайте визначення функції і приведіть приклади функціональної залежності.
2. Перелічите загальні правила диференціювання і формули диференціювання основних елементарних функцій.
3. Для яких функцій доцільно використовувати логарифмічне диференціювання?
4. Що називається диференціалом функції, диференціалом незалежної змінної?
5. Дайте визначення похідної другого порядку, назвіть її механічний зміст.
6. Сформулюйте правило обчислення похідної складеної функції.
7. Як знайти першу і другу похідні функції, заданої параметрично?
8. У чому полягає властивість інваріантості форми диференціала функції?
9. На чому засноване застосування диференціала в наближених обчисленнях?

4. Побудова графіків функцій за допомогою похідної.

Область визначення, межа і безперервність функції.

Графіки. Екстремумі функції. Опуклість та угнутість.

Дотична та нормаль до кривої.



Геометричний зміст похідної – кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює значенню похідної в точці дотику.

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ - рівняння дотичної

Нормаль це пряма, проведена через точку дотику перпендикулярно дотичній. $y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$ - рівняння нормалі

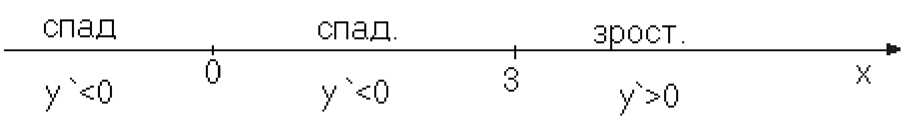
Зростання та спадання функцій.

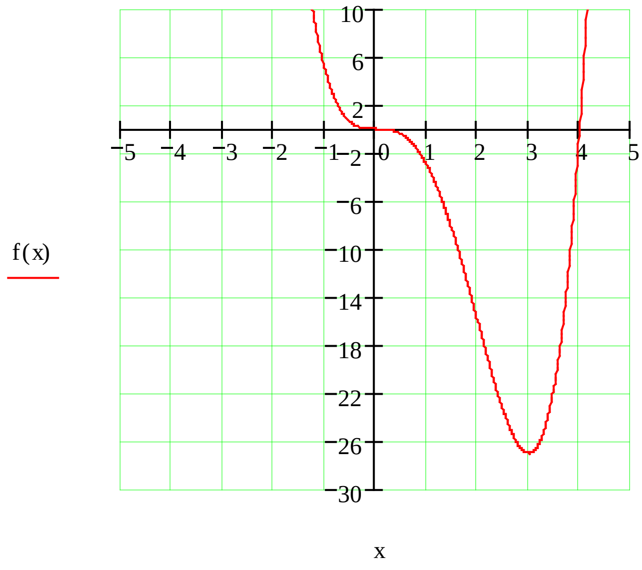
Щоб знайти інтервали зростання та інтервали спадання функції потрібно зробити наступне:

- Знайти похідну f``(x), потім знайти всі значення x, при яких f``(x)=0 тобто критичні точки.
- Позначити на числовій осі точки розриву та критичні точки. Тоді область визначення функції буде розбита на декілька інтервалів.
- В кожному інтервалі обрати одне значення x та знайти знак f``(x) в обраної точці. Якщо похідна додатна, то функція зростає, якщо від’ємна – то спадає.

Приклад 1. Дослідити на зростання та спадання функцію $y=x^4-4x^3$.

$y'=4x^3-12x^2$; $4x^3-12x^2=0$, $x_1=0$,$x_2=3$.





Відшукання найбільшого та найменшого значення функції на даному відрізку.

Щоб знайти найбільше та найменше значення функції на даному відрізку, треба порівняти між собою значення функції в усіх критичних точках, що належать відрізку, і на кінцях відрізка.

Приклад 2. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3$ на відрізку $[0;4]$.

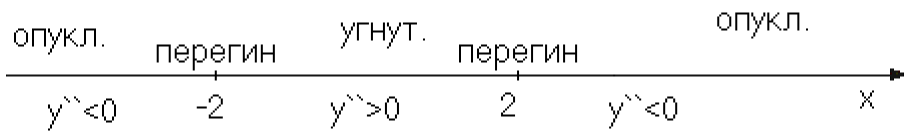
$y' = x^3 - 3x^2$, $x^3 - 3x^2 = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 3$; $y(0) = 0$, $y(3) = -6{,}75$, $y(4) = 0$. Отже 0 - найбільше, -6,75 - найменше значення функції.

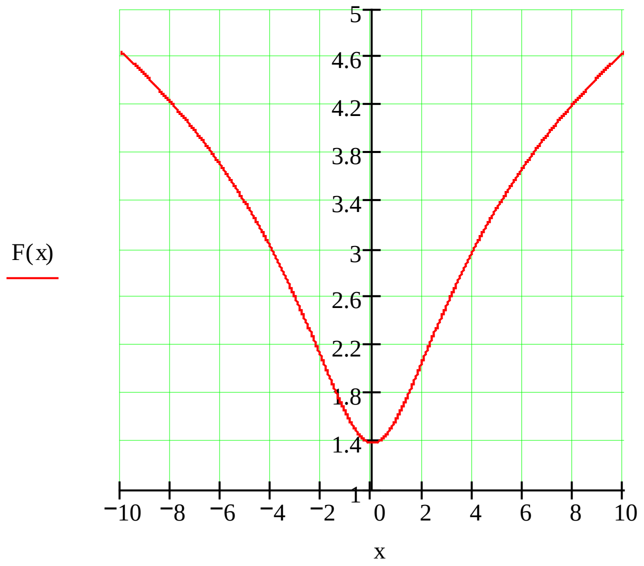
Дослідження графіка функції на опуклість та угнутість.

Якщо в усіх точках інтервалу друга похідна додатна, то графік функції угнутий, якщо в усіх точках інтервалу друга похідна від’ємна – опуклий.

Приклад 5. Дослідити функцію на опуклість та угнутість. $y = \ln(x^2 + 4)$.

$y' = \frac{2x}{x^2 + 4}$; $y'' = \frac{2(4 - x^2)}{(x^2 + 4)^2}$. Нулі (критичні точки) другої похідної: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.





Питання для самоперевірки.

1. У чому полягає геометричне значення похідної?
2. Дайте визначення похідної. У чому полягає механічне значення похідної?
3. У чому полягає геометричний зміст диференціала?
4. Які ознаки зростання й убування функції?
5. Які значення аргументу називаються критичними?
6. Що називається екстремумом функції? Як знайти максимуми і мінімуми функції? Сформулюйте два правила.
7. Як надійти з дослідженням функції на екстремум, якщо друга похідна звертається в нуль?
8. Як визначається найбільше і найменше значення функції на відрізку.
9. Як знаходяться інтервали опуклості й угнутості графіка функції?
10. Як знаходяться асимптоті графіка функції?
11. З яких основних пунктів складається загальна схема дослідження функції і побудови її графіка?
12. Як скласти рівняння дотичної і нормалі до графіка функції в точці?
13. Як обчислити кутовий коефіцієнт дотичної до кривої в даній точці?
14. Як знайти найбільше і найменше значення функції, диференційованої на відрізку? Чи завжди вони існують?

5. Інтегральне числення.

Первісна функції. Невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування. Визначений інтеграл і його застосування в прикладних задачах. Фізичний і геометричний зміст визначеного інтеграла і його застосування.

Основні властивості невизначеного інтеграла.

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ 2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$ 3. $\int df(x) = f(x) + C$

4. $\int f'(x)dx = f(x) + C$ 5. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

6. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

7. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, і $u = u(x)$ - диференційована функція, то

$\int f(u)du = F(u) + C$ (властивість інваріантості).

Таблиця невизначених інтегралів.

1. $\int 0 \cdot du = C$. 2. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C; (\alpha \neq -1)$. 2а) $\int du = u + C$.

2б) $\int u\,du=\frac{u^2}{2}+C$. 2в) $\int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{u}+C$. 2г) $\int\frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+C$.

2д) $\int\sqrt{u}\,du=\frac{2}{3}\sqrt{u^3}+C$. 3) $\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C$. 4) $\int a^u\,du=\frac{a^u}{\ln a}+C$.

4а) $\int e^u\,du=e^u+C$. 5) $\int\sin u\,du=-\cos u+C$. 6) $\int\cos u\,du=\sin u\,dx+C$.

7) $\int\frac{du}{\cos^2 u}=tgu+C$. 8) $\int\frac{du}{\sin^2 u}=-ctgu+C$. 9) $\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+C$.

9а) $\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\arcsin u+C$. 10. $\int\frac{du}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{u}{a}+C$.

10а) $\int\frac{du}{1+u^2}=arctgu+C$. 11. $\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C$.

11а) $\int\frac{du}{u^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C$. 12. $\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right|+C$.

Основні методи інтегрування.

1). Уведення нового аргументу (властивість інваріантості).

Якщо $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $\int f(u)du=F(u)+C$, де $u=\varphi(x)$.

2). Метод підстановки. Якщо $f(x)$ - безперервна, то маючи $x=\varphi(t)$, одержимо $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

3). Метод інтегрування по частинам. Якщо $u, v,$ - деякі диференційовані функції від x, то $\int udv=uv-\int vdu$. Застосовується для обчислення інтегралів вигляду: $\int P(x)e^{\alpha x}dx;$ $\int P(x)\cos bxdx;$ $\int P(x)\sin bxdx;$ $\int P(x)\ln xdx$.

- Якщо $\int P(x)\begin{Bmatrix}e^x\\ \sin x\\ \cos x\end{Bmatrix}dx$, то $u=P(x)$; $dv=\begin{Bmatrix}e^x\\ \sin x\\ \cos x\end{Bmatrix}dx$
- Якщо $\int P(x)\begin{Bmatrix}\ln x\\ \arcsin x\,dx\\ arctgx\end{Bmatrix}$, то ; $u=\begin{Bmatrix}\ln x\\ \arcsin x\\ arctgx\end{Bmatrix}dx$; $dv=P(x)dx$

Приклад 1. $\int xe^{3x}dx=\left|\begin{matrix}u=x; & dv=e^{3x}dx\\ du=dx; & v=\frac{1}{3}e^{3x}\end{matrix}\right|=\frac{xe^{3x}}{3}-\int\frac{e^{3x}}{3}dx=\frac{xe^{3x}}{3}-\frac{e^{3x}}{9}+C$.

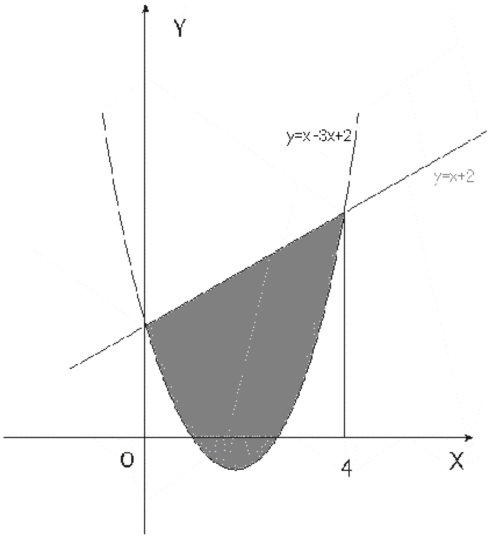
1. Для перебування визначеного інтеграла треба:
   - Знайти невизначений інтеграл
   - У функціональну частину невизначеного інтеграла підставити спочатку верхню межу, потім нижню, і з першого результату підстановки відняти другий. $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$.
2. Варто пам'ятати, що у визначеному інтегралі межі інтегрування завжди відносяться тільки до тієї перемінний, котра входить до складу підінтегрального виразу. Тому при обчисленні визначеного інтеграла межі варто підставляти тільки замість даної перемінний, а не замість нової змінної.

$$S=\int_a^b f(x)dx; V=\pi\int_a^b y^2\,dx; A=\int_a^b f(x)dx.$$

Обчислення площі плоскої фігури. Площа фігурі, обмеженої двома неперервними кривими, причому $f_2(x)>f_1(x)$ на інтервалі(a;b),

задається формулою: $S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$.

Приклад 2. Обчислити площу фігурі, обмеженої лініями:$y=x^2-3x+2$ та $y=x+2$. Спочатку знайдемо точки перетину двох даних ліній. Для цього треба розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} y=x^2-3x+2 \\ y=x+2 \end{cases}$. Тоді a=0;b=4. $\int_0^4 \left((x+2)-(x^2-3x+2)\right)dx=10\frac{2}{3}$ (кв. од).



Питання для самоперевірки.

1. Що є основною задачею інтегрального числення?
2. Чому одна функція має цілую сукупність первісних? Як записати всю сукупність первісних?
3. Чому інтеграл називається невизначеним? Чим відрізняються друг від друга підінтегральна функція і підінтегральній вираз?
4. Що означає постійна C в визначенні невизначеного інтеграла? Чому рівна похідна і диференціал невизначеного інтеграла?
5. У чому полягає правило інтегрування вираження, що містить постійний множник? Чому дорівнює інтеграл від диференціала деякої функції?
6. У чому полягає правило інтегрування алгебраїчної суми функцій? Як перевірити результат інтегрування?
7. У чому складається геометричний зміст невизначеного інтеграла? Як визначити постійну інтегрування по початковим даної?
8. У чому полягає метод інтегрування раціональних дробів?
9. У чому полягає метод інтегрування по частинам?
10. У чому полягає метод заміни змінної?
11. Сформулюйте таблицю основних інтегралів.
12. Що таке визначений інтеграл? У чому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла?
13. Властивості визначеного інтеграла.
14. Як обчислюються площі плоских фігур за допомогою визначеного інтеграла?

6. Диференціальні рівняння.

Основні поняття диференціальних рівнянь. Задача Коші. Лінійні диференціальні рівняння. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку. Системи диференціальних рівнянь.

Рівняння називається диференційним, якщо в нього крім шуканої функції входять Ії похідні або диференціали.

Диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними.

Так називаються рівняння, в яких можна відокремити змінні, тобто привести до вигляду g(y)dy=h(x)dx або $f(x)dx+\varphi(y)dy=0$.Рішення такого рівняння виконується безпосереднім інтегруванням $\int f(x)dx+\int\varphi(y)dy=C$.Рівняння виду $f(x)F(y)dx+\varphi(x)\theta(y)dy=0$ можна привести до виду $f(x)dx+\varphi(y)dy=0$, розділивши всі члени рівняння на добуток $\varphi(x)F(y)$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y'=2xy$

$\frac{dy}{dx}=2xy;\quad \frac{dy}{y}=2dx$. Після того, як змінні відокремлені, інтегруємо ліву та праву частини: $\int\frac{dy}{y}=\int 2xdx;\quad \ln y=x^2+C;\quad y=e^{x^2+C}$.

Отриманий розв'язок містить довільну сталу С і називається загальним розв'язком . Загальний розв'язок кожного рівняння першого порядку завжди містить одну довільну сталу. Для Її знаходження (тобто розв'язування задачі Коші) необхідно знати початкову умову, тобто відоме значення функції при деякому відомому значенні аргументу.

Однорідними диференціальними рівняннями називаються рівняння, що можуть бути приведені до виду $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$, тобто похідна виражена у виді функції від відношення $\frac{y}{x}$.Для інтегрування таких рівнянь роблять заміну перемінних $\frac{y}{x}=t$. Ця підстановка приводить до диференціального рівняння відносно x і t у якому змінні відокремлені , після чого можна інтегрувати.

Приклад 2.Розв'язати рівняння : $xy'=x+y$ Тоді $y'=1+\frac{y}{x}$, тобто маємо однорідне рівняння.

Робимо заміну $y=tx;\quad y'=t'x+t;\quad t'x+t=1+\frac{tx}{x}\Rightarrow t'x+t=1+t;\quad t'x=1$ Відокремимо змінні

$dt=\frac{dx}{x}\Rightarrow t=\ln x+\ln C\Rightarrow y=x\ln Cx$.

Лінійні диференціальні рівняння містять невідому функцію і її похідну тільки в першої степені. $y'+yf(x)=F(x)$.

Для розв'язування цих рівнянь використовують підстановку $y=uv$, де u і v- допоміжні шукані функції.

Приклад 3. $x^2y'+2xy=e^{-x}$. Для зведення до стандартного вигляду поділимо ліву та праву частини на x^2: $y'+\frac{2}{x}y=\frac{e^{-x}}{x^2};\quad y=uv;\quad y'=u'v+v'u;\quad u'v+v'u+\frac{2uv}{x}=\frac{e^{-x}}{x^2}$

Далі у другому та третьому доданках виносимо за дужки u, а те що залишається у дужках, прирівнюємо до нуля: $u'v+u\left(v'+\frac{2v}{x}\right)=\frac{e^{-x}}{x^2};\quad v'+\frac{2v}{x}=0$ - це рівняння є рівняння з відокремлюваними змінними. Знаходимо який-небудь його розв'язок:

$\frac{dv}{dx}=-\frac{2v}{x};\quad \frac{dv}{v}=-\frac{2dx}{x};\quad \ln v=-2\ln x;\quad v=\frac{1}{x^2}$.Для знаходження u підставляємо знайдене v у рівняння $u'v+u\left(v'+\frac{2v}{x}\right)=\frac{e^{-x}}{x^2};$ Тоді отримуємо $u'\frac{1}{x^2}=\frac{e^{-x}}{x^2};\quad u'=e^{-x};\quad u=-e^{-x}+C$.

Загальний розв'язок такий : $y=\frac{-e^{-x}+C}{x^2}$.

Питання для самоперевірки.

1. Яке рівняння називається диференціальним.
2. Назвіть відомі вам типи диференціальних рівнянь.
3. У чому міститься відокремлювання змінних у диференціальному рівнянні?
4. Яке рівняння називається диференціальним лінійним і як воно інтегрується?
5. Яке рівняння називається однорідним диференціальним і як воно інтегрується?

Список літератури:

- Основна:

1. Г.Н. Яковлев. Алгебра и начала анализа. 2 ч. М.1978.
2. Г.Н. Яковлев. Геометрия. М.1978.
3. Т.Г. Стрижак. Математичний аналіз. Київ.1995.
4. Ю.К. Рудавський. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії.
5. Ю.К. Рудавський. Лінійна алгебра та аналітична геометрія.
6. В.М. Лейфура. Математика. К. 2003.
7. Л.І.Дюженкова. Математичний аналіз у задачах і прикладах. К.2003.Ч.1.
8. Л.І.Дюженкова. Математичний аналіз у задачах і прикладах. К.2003.Ч.2.
9. Т.Г Стрижак. Математичний аналіз.К.1995.
10. Л.В. Барановська.Завдання для практичних занять з вищої математики.К.2002.
11. Т.В.Лубенська. Вища математика в таблицях. К.2002.

- Додаткова:

12. А.А. Гусак. Высшая математика. 2 ч. Минск.2001.
13. В.В. Пак. Вища математика. Київ. 1986.
14. И.А. Каплан. Практические занятия по высшей математике. 2ч.Харьков.1970.
15. К.Н. Лунгу. Сборник задач по высшей математике. М.2001.
16. Н.В. Богомолов. Практические занятия по математике. М. 1990.
17. Д.Т. Письменный. Конспект лекций по высшей математике. 2 ч. М.2002.
18. П.Е. Данко. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.2002.
19. А.А. Гусак. Пособие к решению задач по высшей математике. Минск. 1967.
20. М.Я. Выгодский . Справочник по высшей математике. М. 2001.
21. В.Т. Лисичкин. Математика. М.1991.
22. В.Г. Кривуца. Вища математика. Практикум.К2005.