

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ВІДОКРЕМЛЕНИЙ СТРУКТУРНИЙ ПІДРОЗДІЛ  
МАРІУПОЛЬСЬКИЙ МАШИНОБУДІВНИЙ ФАХОВИЙ КОЛЕДЖ  
ДЕРЖАВНОГО ВИЩОГО НАВЧАЛЬНОГО ЗАКЛАДУ  
«ПРИАЗОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

## **Методичні вказівки**

### **до виконання контрольної роботи**

**НАВЧАЛЬНА ДИСЦИПЛІНА: «ВИЩА МАТЕМАТИКА»**

Освітньо-професійної програми «Зварювальне виробництво»

Галузь знань 13 «Механічна інженерія»

Спеціальність 131 «Прикладна механіка»

Освітньо-професійний рівень «Фаховий молодший бакалавр»

Методичні вказівки до виконання контрольної роботи з дисципліни  
 “Вища математика”

Варіанти завдань обираються відповідно номеру у журнали навчальної групи.

Тематичний план .

- № Найменування розділів і тем
- 1 Рішення систем лінійних рівнянь
  - 2 Вектори і дії над ними
  - 3 Похідна першого і вищого порядків
  - 4 Побудова графіків функцій за допомогою похідної
  - 5 Визначений інтеграл і його застосування
  - 6 Диференціальні рівняння

### 1.Рішення систем лінійних рівнянь.

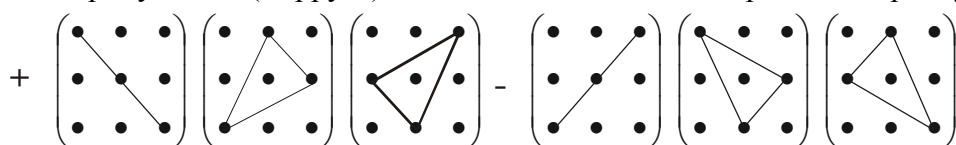
Визначники. Рішення і дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Метод Джордана-Гауса. Метод Крамера.

1.1.  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  - визначник другого порядку;

1.2.  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$  - визначник третього

порядку.

Правило трикутників (Сарруса) обчислення визначників третього порядку.



1.3.Розв'язання систем лінійних рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \text{ та } x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}, \text{ де}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

1.4.Рішення систем лінійних рівнянь методом Гауса: перетворення складається з декількох кроків, на кожному з яких виключається одне невідоме, для чого можна додавати до обох частин одного рівняння інше рівняння системи, помножене на деяке число.

1.5. *Означення.* Мінором  $M_{ij}$  елемента визначника  $n$ -го порядку  $|A|$  називається визначник порядку  $n-1$ , який ми одержимо з визначника  $|A|$ , якщо закреслимо  $i$ -й рядок та  $j$ -й стовпець.

Алгебраїчне доповнення  $A_{ij}$  елемента  $a_{ij}$  визначається формулою  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ .

Добутком матриці  $A$  розмірності  $m \times r$  та матриці  $r \times n$  називається матриця  $C$  розмірності  $m \times n$ , якщо кожний елемент  $c_{ij}$  дорівнює добутку  $i$ -го рядка матриці  $A$  на  $j$ -й стовпець матриці  $B$ :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

**Приклад1:** Обчислити визначник за правилом Сарруса.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-4) \cdot 1 + (-2) \cdot 3 \cdot 2 - (-2) \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-4) \cdot 2 - 0 \cdot 3 \cdot 0 = -12 + 4 + 8 = 0.$$

**Приклад 2.** Розв'язати по формулах Крамера систему рівнянь :

$$\begin{cases} x - y + z = 5 \\ 2x + y + z = 6 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases} \text{ Визначник цієї системи: } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0. \text{ Обчислимо}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -5; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5. \text{ Звідси}$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 3; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -1; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 1.$$

**Приклад 3.** Розв'язати методом Гауса систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + 2z = 8 \\ 5x - 3y + 2z = 5 \\ x + 3y + 3z = 16 \end{cases} \quad 1) \begin{cases} x + \frac{1}{2}y + 2z = 8 \\ 11y + 16z = 70 \\ \frac{5}{2}y + z = 8 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + \frac{1}{2}y + 2z = 8 \\ 11y + 16z = 70 \\ 29z = 87 \end{cases}$$

- З першого рівняння системи знаходимо  $x$  і підставляємо його в друге і третє рівняння. У результаті отримуємо нову систему 1).
- З другого рівняння системи 1) знаходимо  $y$  і підставляємо його в третє рівняння
- Виконуючи зворотний хід у системі 2), отримуємо  $x=1, y=2, z=3$ .

Питання для самоперевірки.

1. Що називається визначником?
2. Основні властивості визначників.
3. Опишіть методи Гауса і Крамера розв'язування систем лінійних рівнянь.

## 2. Вектори і дії з ними.

Метод координат, вектори. Лінія і пряма на площині. Лінії іншого порядку. Пряма і площина в просторі.

2.1. Три взаємно перпендикулярні осі  $Ox, Oy, Oz$ , які мають спільний початок точку  $O$  і однакову масштабну одиницю, утворюють прямокутну декартову систему координат у просторі. Якщо таких осей дві:  $Ox$  і  $Oy$ , то маємо систему координат на площині.

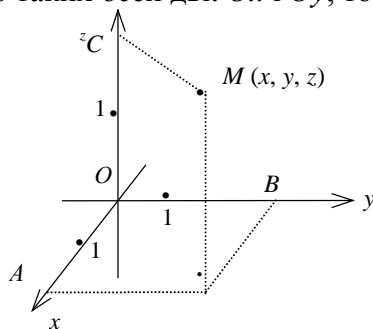


Рис.1

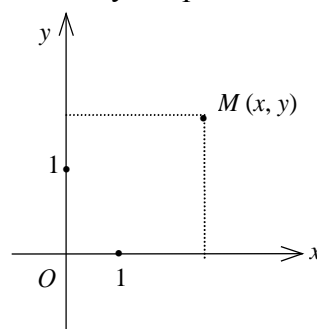


Рис.2

Осі  $Ox, Oy, Oz$  називаються відповідно *осьми абсцис, ординат і аплікат*, точка  $O$  — *початок системи координат*. Нехай  $M$  — довільна точка в просторі або на площині. Декартовими

координатами  $x, y, z$  точки  $M$  називатимемо відповідно довжини  $OA, OB, OC$  напрямлених відрізків  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ .

Таким чином, кожній точці простору відповідає впорядкована трійка чисел  $(x, y, z)$ , а на площині — впорядкована пара чисел  $(x, y)$ , тобто встановлюється відповідність між геометричним образом — точкою і впорядкованою множиною чисел. Ця відповідність дає можливість використовувати рівняння для відображення геометричних образів, таких як лінія, площина тощо, та застосовувати алгебраїчні методи для розв'язування геометричних задач.

*Означення.* Скалярним добутком двох ненульових векторів  $\vec{a}$  називається число (скаляр), яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними. Якщо хоча б один із векторів дорівнює нулю, то кут між векторами не визначений і за означенням скалярний добуток дорівнює нулю.

Отже:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

*Означення.* Векторним добутком вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$  називається вектор  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ , якщо:

1) довжина вектора  $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$ , де  $\varphi$  — кут між двома векторами;

2) вектор  $\vec{c}$  перпендикулярний до кожного з векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

3) вектор  $\vec{c}$  спрямований так, що коли дивитися з його кінця на площину, в якій лежать вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , то поворот вектора до вектора відбувається на найменший кут проти годинникової стрілки.

Модуль векторного добутку двох неколінеарних векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах як на сторонах.

*Означення.* Мішаним добутком векторів  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора  $\vec{a}$  на векторний добуток векторів  $\vec{b}$  і  $\vec{c}$ , тобто  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ .

Розглянемо геометричний зміст змішаного добутку. Для цього побудуємо на векторах  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , вважаючи, що вони не лежать в одній площині, тобто не компланарні, паралелепіпед. Модуль мішаного добутку чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .

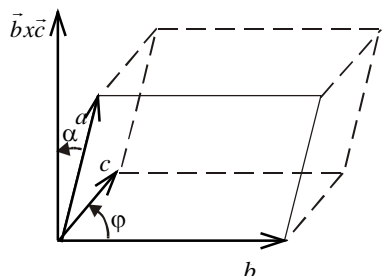


Рис. 3

Вектори в просторі. Якщо вектори компланарні, то їх мішаний добуток у координатах дорівнює нулю.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

**Приклад 1.** Знайти об'єм піраміди по відомим координатам її вершин.  $A=(5;1;-4)$ ,  $B=(1;2;-1)$ ,  $C=(3;3;-4)$ ,  $D=(2;2;2)$ .

$$\vec{AB}(-4;1;3); \vec{AC}(-2;2;0); \vec{AD}(-3;1;6), \text{ тоді } V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 4 \text{ (куб. од).}$$

**Приклад 2.** Перевірити, чи компланарні вектори  $\vec{a}(-1;-1;6)$ ,  $\vec{b}(-2;0;2)$ ,  $\vec{c}(1;-1;4)$ ?

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \text{ отже вектори компланарні.}$$

*Означення.* Рівняння  $F(x, y) = 0$  називається *рівнянням деякої лінії в заданій системі координат*, якщо це рівняння задовольняють координати  $(x, y)$  будь-якої точки, що лежить на цій лінії, і не задовольняють координати жодної точки, що не лежить на цій лінії.

### Рівняння лінії і поверхні у просторі.

Загальне рівняння площині  $Ax + By + Cz + D = 0$ .

$$\text{Параметричні рівняння прямої: } \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

$$\text{відстань від точки до площини: } d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\text{Канонічні рівняння прямої: } \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

$$\text{Кут між прямою та площиною: } \sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

$$\text{Перетин прямої і площини: } (Am + Bn + Cp)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0.$$

**Приклад 1.** Знайти точку перетину прямої  $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1}$  і площині  $3x - 2y + z - 3 = 0$ .

Перейдемо від канонічних рівнянь прямої до параметричних:  $x = -1 + 2t$ ;  $y = 2 + t$ ;  $z = 1 - t$ .

Підставимо значення  $x, y$  і  $z$  в рівняння площини:  $3(-1 + 2t) - 2(2 + t) + (1 - t) - 3 = 0$ , звідки знайдемо, що  $t = 3$ . Підставивши отримане значення  $t$  в параметричні рівняння прямої, знайдемо координати точки перетину:  $x = 5, y = 5, z = -2$ .

2.2. Лінії другого порядку.

Канонічне рівняння кола:  $x^2 + y^2 = R^2$ , Рівняння кола з центром в точці  $(x_0; y_0)$ :  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ .

Канонічне рівняння еліпса:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , де  $a$  - велика піввісь еліпса;  $b$  - мала піввісь;  $x$  і  $y$  -

поточні координати точок еліпса.

Рівняння еліпса з осями паралельними до осей координат, і з центром в точці  $(x_0; y_0)$ :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Канонічне рівняння гіперболи:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,

Спряжені гіперболи:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  і  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ .

Рівняння гіперболи з осями паралельними до осей координат, дійсна вісь паралельна осі абсцис і

з центром в точці  $(x_0; y_0)$ :  $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ .

Канонічне рівняння параболи  $y^2 = 2px$ .  $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ ;

Якщо парабола симетрична відносно осі ординат, а вершина міститься в початку координат, то її рівняння має вигляд  $x^2 = 2py$ .

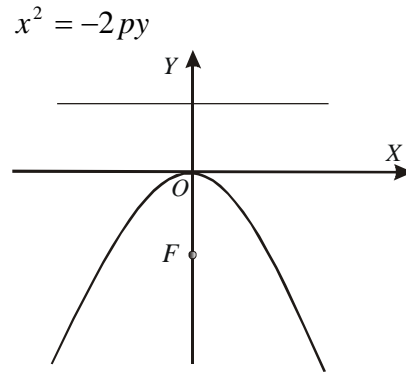
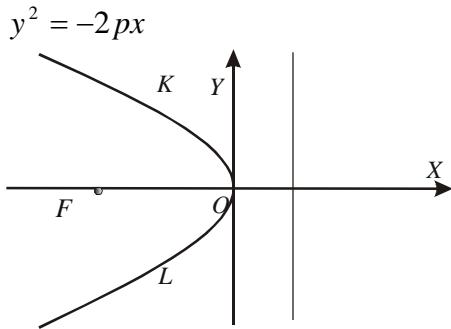
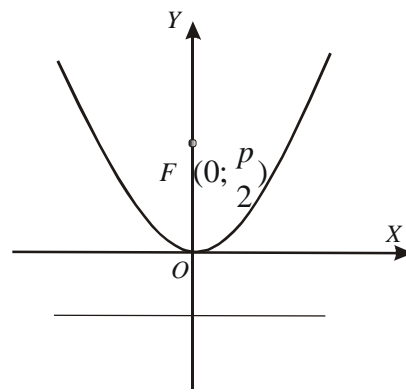
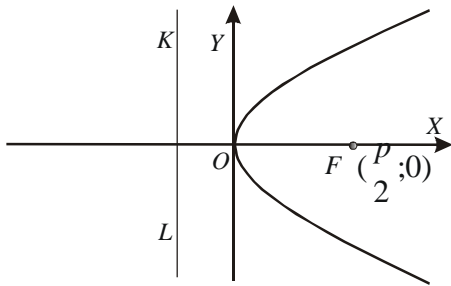
Якщо парабола симетрична відносно прямої  $y = y_0$  а вершина міститься в точці  $(x_0; y_0)$ , то її рівняння має вигляд  $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ .

Якщо парабола симетрична відносно прямої  $x = x_0$ , а вершина міститься в точці  $(x_0; y_0)$ , то її рівняння має вигляд  $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$ .

Парабола.

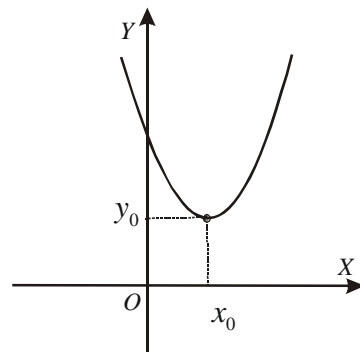
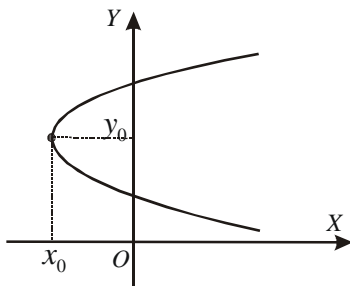
$$y^2 = 2px$$

$$x^2 = 2py$$



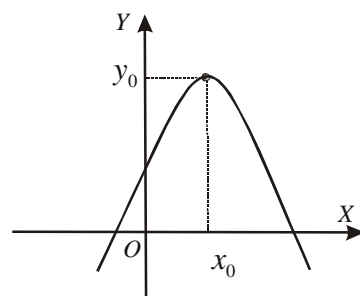
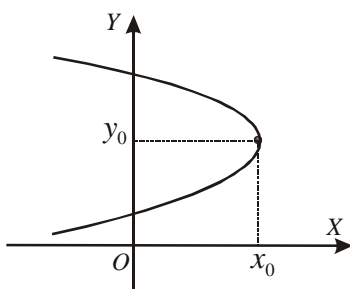
$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$

$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$



$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$

$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$



**Приклад 3.** Встановити вид кривої  $x^2 - 4x + 4y + 12 = 0$ .

Якщо виділити повний квадрат, то отримаємо  $(x-2)^2 = -4(y+2)$ . Отже парабола з вершиною в точці  $(2; -2)$  і параметром  $p=2$ .

Питання для самоперевірки.

1. Напишіть рівняння рівнобічної гіперболи.
2. Напишіть рівняння асимптот гіперболи.
3. Що називається ексцентриситетом еліпса і яка його величина в порівнянні з одиницею.
4. Які гіперболи називаються спряженими?
5. Дайте визначення окружності, еліпса, гіперболи і параболи.

### 3. Похідна першого і вищих порядків.

Похідна на прикладі фізичного і геометричного змісту вираження. Застосування похідної.

Основні теореми диференціального числення. Похідні і диференціали вищих порядків.

3.1. Похідною функції  $y=f(x)$  в точці  $x=x_0$  називається швидкість змінювання функції в цій точці. Воно дорівнює границі відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля. Операція знаходження похідної називається диференціюванням функції; функція яка має похідну у цій точці, називається диференційовною у цій точці.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x = f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Похідна функції.

$$y' = f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} - \text{похідна функції } y = f(x) \text{ в точці } x = a.$$

$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$  - збільшення функції  $y = f(x)$  в точці  $x = a$ .

$f'(a) = \operatorname{tg} \alpha$  - тангенс кута нахилу дотичної, проведеної до графіка функції  $y = f(x)$  в точці  $x = a$ . Основні правила диференціювання.

$$1. C' = 0, (C = \text{const}) \quad 2. (C \cdot U)' = C \cdot U' \quad 3. (U \pm V)' = U' \pm V'$$

$$4. (U \cdot V)' = U' \cdot V + V' \cdot U \quad 5. \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}.$$

Похідна складеної функції.

Якщо  $y = f(u)$ ,  $u = \varphi(x)$ , то  $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ .

Похідна оберненої функції:  $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ .

Похідна функції, заданої параметрично.

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \alpha < t < \beta, t - \text{параметр}; y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Похідна другого порядку функції, заданої параметрично.

$$y'' = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^3}.$$

Таблиця похідних.

$$1. (x^n)' = nx^{n-1}; 1a). (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; 1б). \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}; 2. (a^x)' = a^x \ln a;$$

$$2a). (e^x)' = e^x;$$

$$3. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}; 3a). (\ln x)' = \frac{1}{x}; 4. (\sin x)' = \cos x; 5. (\cos x)' = -\sin x;$$

$$1) (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}; 7. (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}; 8. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$9. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad 10. (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad 11. (\text{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

Наближене обчислення значень функції.

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

### 3.2. Логарифмічна похідна.

При перебуванні похідних від показової-степеневі функції, а також інших громіздких виражень, що допускають логарифмування зручно застосовувати логарифмічну похідну, тобто похідну від логарифма цієї функції:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}, \text{ тоді похідна показової-степеневі функції має вид - } (u^v)' = u^v \cdot v' \cdot \ln u + u^{v-1} \cdot u' \cdot v.$$

**Приклад 1.** Обчисліть похідну.  $Y = x^{\sin x}$

$$\ln y = \ln x^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \sin x \cdot \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \Rightarrow y' = x^{\sin x} \left( \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right).$$

### 3.3. Діференціювання неявної функції.

Щоб знайти похідну від неявної функції треба:

- 1) Продіференціювати кожний доданок, що входить у рівняння.
- 2) При цьому до виразів, які містять  $y$ , треба застосувати правило диференціювання складеної функції.
- 3) Із отриманої рівності знаходимо  $y'$ .

**Приклад 2.** Знайти  $y' : x^2 + y^2 - 25 = 0$ .

$$2x + 2y y' = 0; \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

**Приклад 3.** Знайти похідну функції  $y = \ln \cos 5x$ .

$$\text{Спочатку скористаємося формулою } (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad y' = \frac{(\cos 5x)'}{\cos 5x}.$$

$$\text{Потім застосуємо формулу } (\cos x)' = -\sin x, \quad y' = \frac{-\sin 5x \cdot (5x)'}{\cos 5x}.$$

Нарешті, виносимо сталий множник і отримуємо:

$$y' = \frac{-\sin 5x \cdot 5}{\cos 5x} = -5 \operatorname{tg} 5x.$$

### Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення функції і приведіть приклади функціональної залежності.
2. Перелічіть загальні правила диференціювання і формули диференціювання основних елементарних функцій.
3. Для яких функцій доцільно використовувати логарифмічне диференціювання?
4. Що називається диференціалом функції, диференціалом незалежної змінної?
5. Дайте визначення похідної другого порядку, назвіть її механічний зміст.
6. Сформулюйте правило обчислення похідної складеної функції.
7. Як знайти першу і другу похідні функції, заданої параметрично?
8. У чому полягає властивість інваріантності форми диференціала функції?
9. На чому засноване застосування диференціала в наближених обчисленнях?

## 4. Побудова графіків функцій за допомогою похідної.

Область визначення, межа і безперервність функції.

Графіки. Екстремуми функції. Опуклість та угнутість.

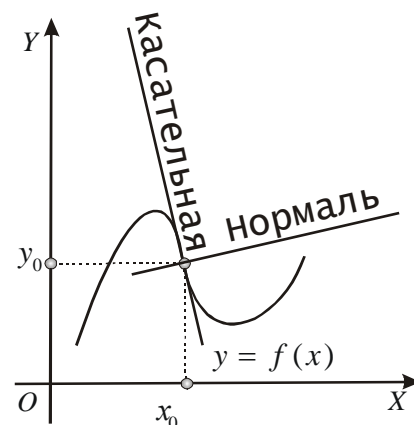
### 4.1. Дотична та нормаль до кривої.

Геометричний зміст похідної – кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює значенню похідної в точці дотику.

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) - \text{рівняння дотичної}$$

Нормаль це пряма, проведена через точку дотику перпендикулярно

$$\text{дотичній. } y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) - \text{рівняння нормалі}$$





#### 4.2. Зростання та спадання функцій.

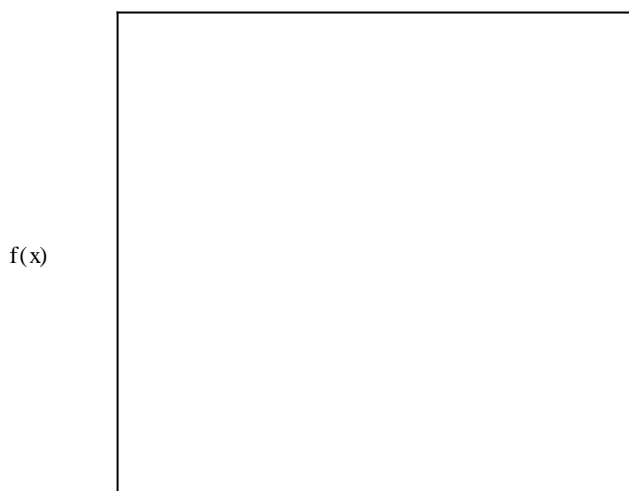
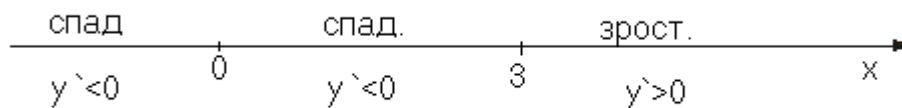
Щоб знайти інтервали зростання та інтервали спадання функції потрібно зробити наступне:

- Знайти похідну  $f'(x)$ , потім знайти всі значення  $x$ , при яких  $f'(x)=0$  тобто критичні точки.
- Позначити на числовій осі точки розриву та критичні точки. Тоді область визначення функції буде розбита на декілька інтервалів.
- В кожному інтервалі обрати одне значення  $x$  та знайти знак  $f'(x)$  в обраної точці.

Якщо похідна додатна, то функція зростає, якщо від'ємна – то спадає.

**Приклад 1.** Дослідити на зростання та спадання функцію  $y=x^4-4x^3$ .

$$y'=4x^3-12x^2; 4x^3-12x^2=0, x_1=0, x_2=3.$$



x

#### 4.3. Відшукування найбільшого та найменшого значення функції на даному відрізку.

Щоб знайти найбільше та найменше значення функції на даному відрізку, треба порівняти між собою значення функції в усіх критичних точках, що належать відрізку, і на кінцях відрізка.

**Приклад 2.** Знайти найбільше та найменше значення функції  $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3$  на відрізку  $[0;4]$ .

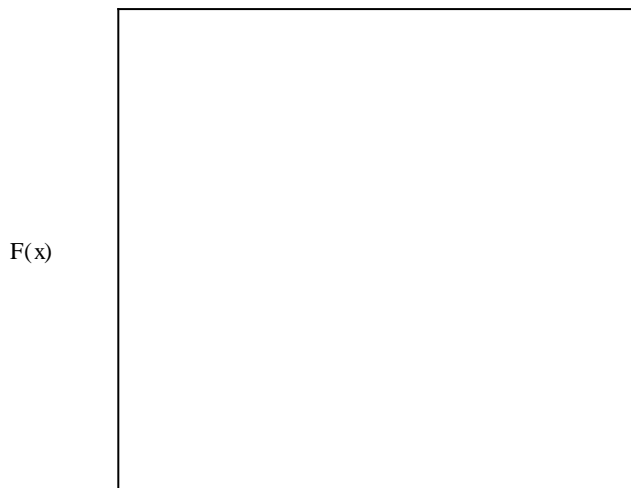
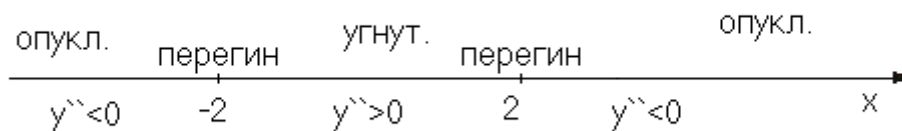
$y'=x^3-3x^2, x^3-3x^2=0; x_1=0, x_2=3; y(0)=0, y(3)=-6,75, y(4)=0$ . Отже 0 - найбільше, -6,75 - найменше значення функції.

Дослідження графіка функції на опуклість та угнутість.

Якщо в усіх точках інтервалу друга похідна додатна, то графік функції угнутий, якщо в усіх точках інтервалу друга похідна від'ємна – опуклий.

**Приклад 3.** Дослідити функцію на опуклість та угнутість.  $y = \ln(x^2 + 4)$ .

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 4}; \quad y'' = \frac{2(4 - x^2)}{(x^2 + 4)^2}. \text{ Нулі (критичні точки) другої похідної: } x_1=-2, x_2=2.$$



4.4. При дослідженні функцій треба:

1. Знайти область визначення функції.
2. Встановити парність (непарність) і періодичність функції.
3. Знайти точки розриву функції та їх характер.
4. Визначити точки перетину графіка функції з осями координат.
5. Знайти точки екстремуму та обчислити значення функції у цих точках.
6. Визначити інтервали зростання й спадання функції.
7. Знайти точки перегину, інтервали випуклості й вгнутості.
8. Знайти граничні значення функції, коли  $x$  прямує до граничних точок області визначення.

Графік функції будують за характерними точками й лініями, отриманими у результаті дослідження. Якщо їх недостатньо, знаходять допоміжні точки для деяких конкретних значень аргументу.

Питання для самоперевірки.

1. У чому полягає геометричне значення похідної?
2. Дайте визначення похідної. У чому полягає механічне значення похідної?
3. У чому полягає геометричний зміст диференціала?
4. Які ознаки зростання й убуття функції?
5. Які значення аргументу називаються критичними?
6. Що називається екстремумом функції? Як знайти максимуми і мінімуми функції?  
Сформулюйте два правила.
7. Як надійти з дослідженням функції на екстремум, якщо друга похідна звертається в нуль?
8. Як визначається найбільше і найменше значення функції на відрізку.
9. Як знаходяться інтервали опуклості й вгнутості графіка функції?
10. Як знаходяться асимптоти графіка функції?
11. З яких основних пунктів складається загальна схема дослідження функції і побудови її графіка?
12. Як скласти рівняння дотичної і нормалі до графіка функції в точці?
13. Як обчислити кутовий коефіцієнт дотичної до кривої в даній точці?
14. Як знайти найбільше і найменше значення функції, диференційованої на відрізку? Чи завжди вони існують?

## 5. Інтегральне числення.

Первісна функції. Невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування. Визначений інтеграл і його застосування в прикладних задачах. Фізичний і геометричний зміст визначеного інтеграла і його застосування.

5.1. Основні властивості невизначеного інтеграла.

$$1. \left( \int f(x) dx \right)' = f(x) \quad 2. d \int f(x) dx = f(x) dx \quad 3. \int df(x) = f(x) + C$$

$$4. \int f'(x) dx = f(x) + C \quad 5. \int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$6. \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

7. Якщо  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , і  $u = u(x)$  - диференційована функція, то

$$\int f(u) du = F(u) + C \quad (\text{властивість інваріантності}).$$

5.2. Таблиця невизначених інтегралів.

$$1. \int 0 \cdot du = C. \quad 2. \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C; (\alpha \neq -1). \quad 2a) \int du = u + C.$$

$$2б) \int u du = \frac{u^2}{2} + C. \quad 2в) \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C. \quad 2г) \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C.$$

$$2д) \int \sqrt{u} du = \frac{2}{3} \sqrt{u^3} + C. \quad 3) \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C. \quad 4) \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C.$$

$$4a) \int e^u du = e^u + C. \quad 5) \int \sin u du = -\cos u + C. \quad 6) \int \cos u du = \sin u dx + C.$$

$$7) \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C. \quad 8) \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C. \quad 9) \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C.$$

$$9a) \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin u + C. \quad 10. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C.$$

$$10a) \int \frac{du}{1 + u^2} = \operatorname{arctg} u + C. \quad 11. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C.$$

$$11a) \int \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u - 1}{u + 1} \right| + C. \quad 12. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C.$$

5.3. Основні методи інтегрування.

1). Уведення нового аргументу (властивість інваріантності).

Якщо  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , то  $\int f(u) du = F(u) + C$ , де  $u = \varphi(x)$ .

2). Метод підстановки. Якщо  $f(x)$  - безперервна, то маючи  $x = \varphi(t)$ ,

одержимо  $\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ .

3). Метод інтегрування по частинам. Якщо  $u, v$ , - деякі диференційовані функції від  $x$ ,

то  $\int u dv = uv - \int v du$ . Застосовується для обчислення інтегралів вигляду:

$$\int P(x) e^{ax} dx; \int P(x) \cos bxdx; \int P(x) \sin bxdx; \int P(x) \ln x dx.$$

На практиці функції  $u(x)$  та  $v(x)$  рекомендується вибирати за таким **правилом**:

— при інтегруванні частинами підінтегральний вираз  $f(x) dx$  розбивають на два множники типу  $u \cdot dv$ , тобто  $f(x) dx = u \cdot dv$ ; при цьому функція  $u(x)$  вибирається такою, щоб при диференціюванні вона спрощувалась, а за  $dv$  беруть залишок підінтегрального виразу, який містить  $dx$ , інтеграл від якого відомий, або може бути просто знайдений.

Деякі типи інтегралів, при інтегруванні яких застосовують метод інтегрування частинами та показано вибір функцій  $u(x)$  та  $v(x)$ :

$$\int \frac{P(x)}{u} \cdot \frac{\sin(ax) dx}{dv}; \int \frac{P(x)}{u} \cdot \frac{\cos(ax) dx}{dv}; \int \frac{P(x)}{u} \cdot \frac{e^{ax} dx}{dv}; \int \frac{\ln(ax)}{u} \cdot \frac{Q(x) dx}{dv}; \int \frac{\operatorname{arctg} x}{u} \cdot \frac{Q(x) dx}{dv};$$

Цей метод базується на властивості невизначеного інтеграла (7.3). Мета методу — розкласти підінтегральну функцію на такі доданки, інтеграли від яких відомі або їх простіше інтегрувати, ніж початкову підінтегральну функцію.

**Приклад 1.** 
$$\int \frac{1 \cdot dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \left( \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx =$$
  

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x + C.$$

**Приклад 2.** 
$$\int x e^{3x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x; \quad dv = e^{3x} dx \\ du = dx; \quad v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right| = \frac{x e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} dx = \frac{x e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C.$$

### 5.3. Визначений інтеграл і його застосування.

1. Для перебування визначеного інтеграла треба:

- Знайти невизначений інтеграл
- У функціональну частину невизначеного інтеграла підставити спочатку верхню межу, потім нижню, і з першого результату підстановки відняти

другий. 
$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

2. Варто пам'ятати, що у визначеному інтегралі границі інтегрування завжди відносяться тільки до тієї змінної, яка входить до складу підінтегрального виразу. Тому при обчисленні визначеного інтеграла границі варто підставляти тільки замість даної перемінний, а не замість нової змінної.

$$S = \int_a^b f(x) dx; V = \pi \int_a^b y^2 dx; A = \int_a^b f(x) dx.$$

5.4. Обчислення площі плоскої фігури. Площа фігури, обмеженої двома неперервними кривими, причому  $f_2(x) > f_1(x)$  на інтервалі  $(a; b)$ ,

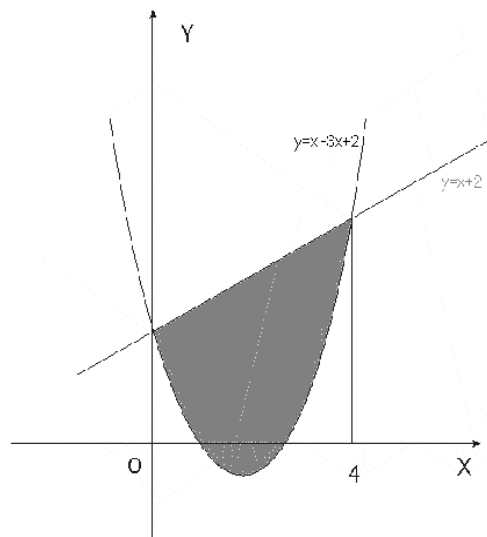
задається формулою: 
$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

**Приклад 3.** Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $y = x^2 - 3x + 2$  та  $y = x + 2$ . Спочатку знайдемо точки перетину двох даних ліній. Для цього треба розв'язати

систему рівнянь: 
$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ y = x + 2 \end{cases}.$$
 Тоді

$a=0; b=4.$  
$$\int_0^4 ((x+2) - (x^2 - 3x + 2)) dx = 10 \frac{2}{3}$$

(кв. од).



Питання для самоперевірки.

1. Що є основною задачею інтегрального числення?
2. Чому одна функція має цілую сукупність первісних? Як записати всю сукупність первісних?
3. Чому інтеграл називається невизначеним? Чим відрізняються друг від друга підінтегральна функція і підінтегральний вираз?
4. Що означає постійна  $C$  в визначенні невизначеного інтеграла? Чому рівна похідна і диференціал невизначеного інтеграла?
5. У чому полягає правило інтегрування вираження, що містить постійний множник? Чому дорівнює інтеграл від диференціала деякої функції?
6. У чому полягає правило інтегрування алгебраїчної суми функцій? Як перевірити результат інтегрування?

7. У чому складається геометричний зміст невизначеного інтеграла? Як визначити постійну інтегрування по початковим даної?
8. У чому полягає метод інтегрування раціональних дробів?
9. У чому полягає метод інтегрування по частинам?
10. У чому полягає метод заміни змінної?
11. Сформулюйте таблицю основних інтегралів.
12. Що таке визначений інтеграл? У чому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла?
13. Властивості визначеного інтеграла.
14. Як обчислюються площі плоских фігур за допомогою визначеного інтеграла?

### 6. Диференціальні рівняння.

Основні поняття диференціальних рівнянь. Задача Коші. Лінійні диференціальні рівняння. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку. Системи диференціальних рівнянь.

Рівняння називається диференціальним, якщо в нього крім шуканої функції входять її похідні або диференціали.

6.1. Диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними.

Так називаються рівняння, в яких можна відокремити змінні, тобто привести до вигляду  $g(y)dy=h(x)dx$  або  $f(x)dx+\varphi(y)dy=0$ . Рішення такого рівняння виконується безпосереднім інтегруванням  $\int f(x)dx+\int \varphi(y)dy=C$ . Рівняння виду  $f(x)F(y)dx+\varphi(x)\theta(y)dy=0$  можна привести до виду  $f(x)dx+\varphi(y)dy=0$ , розділивши всі члени рівняння на добуток  $\varphi(x)F(y)$ .

**Приклад 1.** Розв'язати рівняння  $y' = 2xy$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy; \quad \frac{dy}{y} = 2dx. \text{ Після того, як змінні відокремлені, інтегруємо ліву та праву}$$

$$\text{частини: } \int \frac{dy}{y} = \int 2xdx; \quad \ln y = x^2 + C; \quad y = e^{x^2+C}.$$

Отриманий розв'язок містить довільну сталу  $C$  і називається загальним розв'язком. Загальний розв'язок кожного рівняння першого порядку завжди містить одну довільну сталу. Для її знаходження (тобто розв'язування задачі Коші) необхідно знати початкову умову, тобто відоме значення функції при деякому відомому значенні аргументу.

6.2. Однорідними диференціальними рівняннями називаються рівняння, що можуть бути приведені до виду  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ , тобто похідна виражена у виді функції від відношення  $\frac{y}{x}$ . Для

інтегрування таких рівнянь роблять заміну перемінних  $\frac{y}{x} = t$ . Ця підстановка приводить до диференціального рівняння відносно  $x$  і  $t$  у якому змінні відокремлені, після чого можна інтегрувати.

**Приклад 2.** Розв'язати рівняння:  $xy' = x + y$  Тоді  $y' = 1 + \frac{y}{x}$ , тобто маємо однорідне рівняння.

Робимо заміну  $y = tx$ ;  $y' = t'x + t$ ;  $t'x + t = 1 + \frac{tx}{x} \Rightarrow t'x + t = 1 + t$ ;  $t'x = 1$  Відокремимо змінні

$$dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow t = \ln x + \ln C \Rightarrow y = x \ln Cx.$$

6.3. Лінійні диференціальні рівняння містять невідому функцію і її похідну тільки в першій степені.  $y' + yf(x) = F(x)$ .

Для розв'язування цих рівнянь використовують підстановку  $y = uv$ , де  $u$  і  $v$  - допоміжні шукані функції.

**Приклад 3.**  $x^2 y' + 2xy = e^{-x}$ . Для зведення до стандартного вигляду поділимо ліву та праву

$$\text{частини на } x^2: y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^{-x}}{x^2}; \quad y = uv; \quad y' = u'v + v'u; \quad u'v + v'u + \frac{2uv}{x} = \frac{e^{-x}}{x^2}$$

Далі у другому та третьому доданках виносимо за дужки  $u$ , а те що залишається у дужках,

прирівнюємо до нуля:  $u'v + u\left(v' + \frac{2v}{x}\right) = \frac{e^{-x}}{x^2}$ ;  $v' + \frac{2v}{x} = 0$  - це рівняння є рівняння з

відокремлюваними змінними. Знаходимо який-небудь його розв'язок:

$\frac{dv}{dx} = -\frac{2v}{x}$ ;  $\frac{dv}{v} = -\frac{2dx}{x}$ ;  $\ln v = -2\ln x$ ;  $v = \frac{1}{x^2}$ . Для знаходження  $u$  підставляємо знайдене  $v$  у

рівняння  $u'v + u\left(v' + \frac{2v}{x}\right) = \frac{e^{-x}}{x^2}$ ; Тоді отримуємо  $u' \frac{1}{x^2} = \frac{e^{-x}}{x^2}$ ;  $u' = e^{-x}$ ;  $u = -e^{-x} + C$ .

Загальний розв'язок такий:  $y = \frac{-e^{-x} + C}{x^2}$ .

Питання для самоперевірки.

1. Яке рівняння називається диференціальним.
2. Назвіть відомі вам типи диференціальних рівнянь.
3. У чому міститься відокремлювання змінних у диференціальному рівнянні?
4. Яке рівняння називається диференціальним лінійним і як воно інтегрується?
5. Яке рівняння називається однорідним диференціальним і як воно інтегрується?

Список літератури:

**основна:**

1. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика: Навч. посібник: У 2-х ч. – К.:КНЕУ, 2001.-Ч.І. – 546 с.;
2. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П. Дубовик., І.І. Юрик. – К.: Ігнатекс-Україна., 2013.-4-те вид. – 648 с: іл.
3. Рудавський Ю.К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. /Ю.К.Рудавський, П.П.Костробій, Х.П.Луник, Д.В.Уханська – Л.:Бескид Біт, 2002. – 262с.
4. Дюженкова Л. І. Математичний аналіз у задачах і прикладах: у 2 ч. / [Л. І. Дюженкова, Т.В.Колесник, М. Я. Лященко та ін.]. —Київ: Вища школа, 2002. — Ч1. — 462 с.; ч.2. — 470 с.
5. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1. – К.: Техніка, 2013р.
6. Рудавський Ю. К. Збірник задач з математичного аналізу: у 2 ч./[Ю. К. Рудавський, П.П. Костробій, Л. Л. Лібацький та ін.]. –Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2003-2008. – Ч. 1. – 2008. – 352 с.; ч. 2. – 2003. –232 с. 3
7. Рудавський Ю.К., Костробій П.П., Уханська Д.В., Батюк Ю.Р. та ін. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії – Львів: Видавництво «Бескид Біт», 2002. – 256 с.

**додаткова:**

1. Шкіль М.І. Вища математика: підручник: у 3-х кн. / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, В.М. Котлова. – К.: Либідь, 1994. – Кн. 1.: Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу. – 280с.; Кн. 2: Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Ряди. – 352 с.; Кн. 3: Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння. – 352 с.
2. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Математика: Підручник. – К.: Вища шк., 2001. – 447 с.;
3. Соколенко О.І. Вища математика: Підручник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002. – 432 с.
4. Овчинников П.П. Вища математика: підручник: у 2-х ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. іференціальне і інтегральне числення /П.П. Овчинников, Ф.П.Яремчук, В.М. Михайленко; За заг. ред. П.П. Овчинникова; пер. з рос. П.М. Юрченка. 3-тє вид., випр. –К.: Техніка, 2003. – 600 с.: іл.; Ч. 2: Диференціальні рівняння. Операційне ислення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація та керування. Теорія ймовірностей. Числові методи / П.П.
5. Овчинников, В.М. Михайленко; за заг. ред. П.П. Овчинникова; пер. з рос. Є.В. Бондарук, Ю.Ю. Костиці, Л.П. Оніщенко. – 3-тє вид., випр. – К.: Техніка, 2004. – 792 с.: іл.